1 # Uppgift 1

Pollux Fleetwood ror sin båt i planet $z = 0$ på den spegelblanka sjön Grasmere. Han är på väg till en plats på sjön för att vittja ett nät som lagts ut föregående dag. Pollux' nät kan betraktas som en yta vars ekvation ges av
$x + y^3 z = y + xz^2$.
Punkten $P = (1, -1, -2)$ är en punkt på nätet som ligger 2 m under vattenytan.

(a) Bestäm en ekvation för nätets tangentplan i punkten P.

(b) En fisk simmar i vattnet längs linjen
$L\colon 2x + y = 1,\ z = -2$
i riktning mot punkten P. I vilken riktning simmar fisken om den börjar sin färd i planet $x = 0$? Svara med en riktningsvektor $\mathbf{v}$. Kommer fisken att fastna i Pollux nät när den passerar punkten P?

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 3

2 Uppgift 2

Låt
$w = f(xz, yz)$.
Antag att $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning ett.

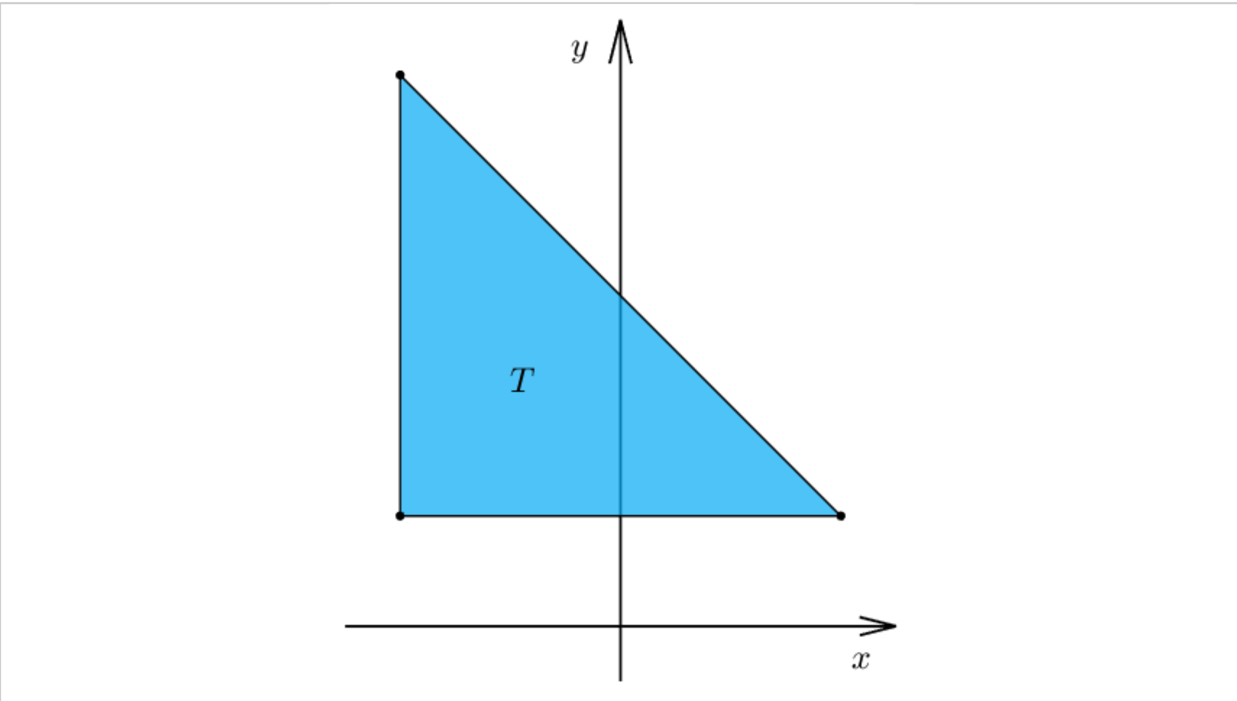
(a) Uttryck
$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$
i partiella derivator av f.

(b) Visa att
$xw_x + yw_y = zw_z$.

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 3

3 Uppgift 3



Bestäm maximi- och minimivärdet av funktionen
$f(x, y) = 1 + xy - 2x + y$
på det triangulära området T med hörn i punkterna $(-2, 1)$, $(2, 1)$ och $(-2, 5)$ (se figur).

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 4

4 ## Uppgift 4

Låt D beteckna det område i $\mathbb{R}^2$ som definieras av

$$D\colon \frac{\sqrt{x}}{2} \leq y \leq 1,\ x \geq 0.$$

(a) Skissa området D i xy-planet och beräkna arean av D. (2 p)

(b) Beräkna integralen

$$\iint_D e^{y^3}\, dA.$$

Tips: Integrera x först, sedan y. (3 p)

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 5

5 ## Uppgift 5

Låt U beteckna det område i $\mathbb{R}^3$ som definieras av

$$U\colon \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - y^2 \\ 0 \leq x \leq 2 - y - z. \end{cases}$$

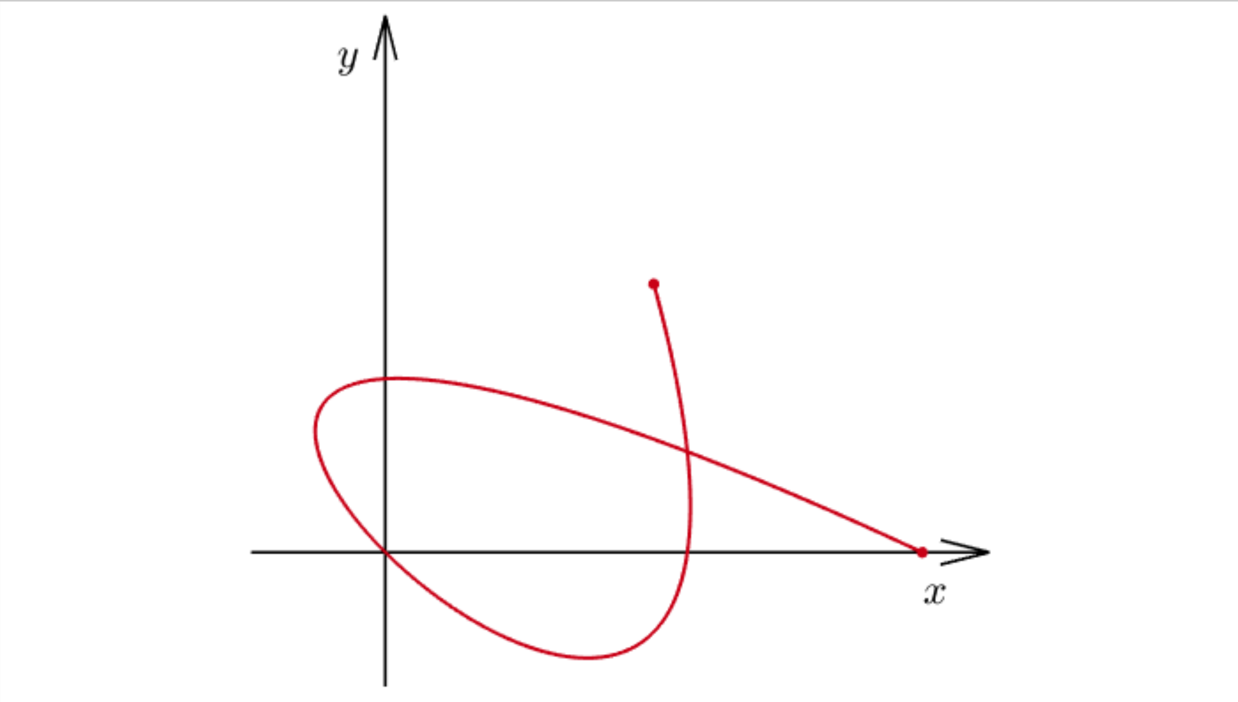
(a) Låt $P = (x, y, z)$ vara en godtycklig punkt i området U. Bestäm största och minsta värdet som P:s y-koordinat kan anta.

(b) Beräkna volymen av området U.

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 5

6 **Uppgift 6**



Låt C beteckna den orienterade kurva i $\mathbb{R}^2$ (se figur ovan) som definieras av parametriseringen

$$C\colon \begin{cases} x = 4t^3 + 3t^2 - 3t \\ y = -4t^3 + t^2 + 3t \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

(a) Ange kurvans startpunkt och slutpunkt. Skissa kurvans orientering med ledning av figuren.
(1 p)

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C (x + y)\, dy.$$

(2 p)

(b) Beräkna kurvintegralen

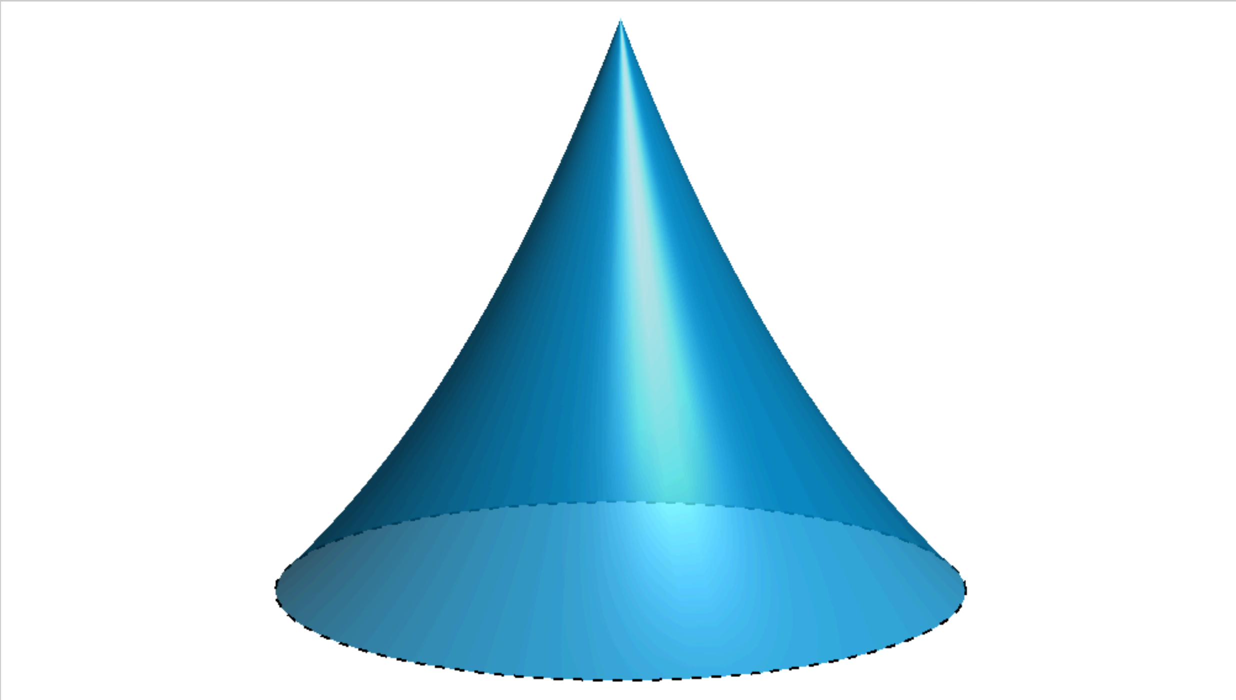
$$\int_C \ln(1 + e^y)\, dx + \frac{xe^y}{1 + e^y} dy.$$

(2 p)

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 5

7 Uppgift 7



En genomskinlig tältduk (se figur) har formen av en parametriserad yta

$$Y\colon \begin{cases} x = s\cos t \\ y = s\sin t \\ z = 3e^{-s} \end{cases} \quad (0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi).$$

(a) Bestäm det orienterade ytelementet $\hat{\mathbf{N}}\,dS$ om tältduken är orienterad så att enhetsnormalen har positiv z-komponent. (2 p)

(b) En vind blåser med hastigheten
$\mathbf{F}(x, y, z) = -yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$
genom tältduken. Bestäm flödet av $\mathbf{F}$ genom Y. (3 p)

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 5

Lösningsförslag
Tenta i Flervariabelanalys
2026-03-12

1 (a) Sätt $F(x,y,z) = x + y^3 z - y - xz^2$. Då kan ytans ekvation skrivas $F(x,y,z) = 0$. Gradienten

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 - z^2 \\ 3y^2 z - 1 \\ y^3 - 2xz \end{pmatrix}$$ är en normalvektor till

ytan i varje punkt. Specifikt i $P = (1,-1,-2)$ är

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} 1-4 \\ -6-1 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{N} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

Tangentplanets ekv. i P fås av

$$\bar{N} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-1) \\ z-(-2) \end{pmatrix} = 0 \iff 3(x-1) + 7(y+1) - 3(z+2) = 0$$

$$\iff \boxed{3x + 7y - 3z = 2}$$

b) Vi parametriserar L genom att använda $x = t$ som parameter.

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-2t \\ -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{startposition}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{riktningsvektor}}$$

Fisken börjar sin färd i punkten $(0,1,-2)$, simmar i riktningen $\boxed{\bar{v} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}}$ och når P då $t = 1$.

Eftersom

$$\bar{N} \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -11 \neq 0$$

kommer fisken att <u>korsa tangentplanet</u> och fastna i Pollux' nät!

2| Sätt $\begin{cases} u = xz \\ v = yz \end{cases} \Rightarrow w = f(u,v)$

(a) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = f_1 \cdot z + f_2 \cdot 0 = z f_1$

$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = f_1 \cdot 0 + f_2 \cdot z = z f_2$

$\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z} = f_1 \cdot x + f_2 \cdot y = x f_1 + y f_2$

(b) $VL = x w_x + y w_y = x \cdot z f_1 + y \cdot z f_2 = z(x f_1 + y f_2)$

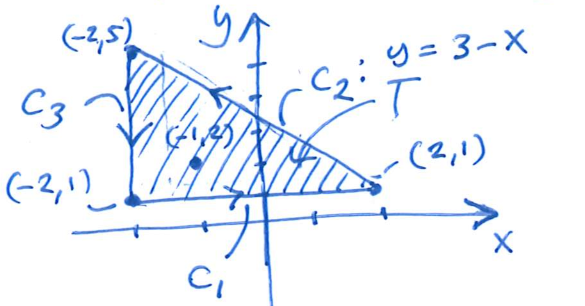
$= z w_z = HL$ v.s.v.

3| Kritiska punkter fås av

$\begin{cases} f_x = y - 2 = 0 \\ f_y = x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

inre punkt

$f(-1,2) = 1 - 2 + 2 + 2 = \underline{\underline{3}}$



Singulära punkter: saknas

Randundersökning:

C_1: $y = 1$, $-2 \le x \le 2$

$g_1(x) = f(x,1) = 1 + x - 2x + 1 = 2 - x$ (avtagande)

$g_1(-2) = \underline{\underline{4}}$ (max), $g_1(2) = \underline{\underline{0}}$ (min)

C_2: $y = 3 - x$, $-2 \le x \le 2$

$g_2(x) = f(x, 3-x) = 1 + x(3-x) - 2x + 3 - x = 4 - x^2$

$g_2'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (lok.max.)

$g_2(-2) = g_2(2) = \underline{\underline{0}}$ (min), $g_2(0) = \underline{\underline{4}}$ (max).

C_3: $x = -2$, $1 \le y \le 5$

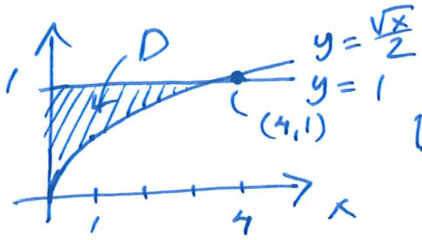
$g_3(y) = f(-2, y) = 1 - 2y + 4 + y = 5 - y$ (avtagande)

$g_3(1) = \underline{\underline{4}}$ (max), $g_3(5) = \underline{\underline{0}}$ (min)

Svar: $f_{max} = 4$ antas i $(-2,1)$ och $(0,3)$.

$f_{min} = 0$ antas i $(2,1)$ och $(-2,5)$.

4 (a)



$D: \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ \frac{\sqrt{x}}{2} \le y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 4y^2 \end{cases}$

Arean av D ges av

$$|D| = \iint_D dA = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}/2}^1 dy\,dx = \int_0^4 \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^{3/2}}{3}\right]_{x=0}^4$$

$$= 4 - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} \text{ a.e.}$$

Alternativt:

$$|D| = \iint_D dA = \int_0^1 \int_0^{4y^2} dx\,dy = \int_0^1 4y^2\,dy = \left[\frac{4y^3}{3}\right]_{y=0}^1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} \text{ a.e.}$$

(b) Enligt ledningen bör x integreras först. Således

$$\iint_D e^{y^3} dA = \int_0^1 \int_0^{4y^2} e^{y^3} dx\,dy = \int_0^1 e^{y^3} \cdot 4y^2\,dy \quad \begin{bmatrix} u = y^3 \\ du = 3y^2 dy \end{bmatrix}$$

$$= 4 \int_{u=0}^1 e^u \cdot \frac{1}{3}\,du = \frac{4}{3}\left[e^u\right]_{u=0}^1 = \frac{4}{3}\left(e^1 - e^0\right) = \underline{\underline{\frac{4(e-1)}{3}}}$$

5 $U: \begin{cases} 0 \le z \le 1 - y^2 \\ 0 \le x \le 2 - y - z \end{cases}$

(a) $0 \le z \le 1 - y^2 \Rightarrow 0 \le 1 - y^2 \Rightarrow y^2 \le 1 \Rightarrow \boxed{-1 \le y \le 1}$

Är alla y i detta intervall förenliga med den andra olikheten?

$0 \le x \le 2 - y - z \Rightarrow z \le 2 - y$. Dessutom $z \ge 0 \Rightarrow \boxed{y \le 2}$.

Ja, ingen motsägelse!

Svar: $-1 \le y \le 1$.

(b) $U: \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 - y^2 \\ 0 \le x \le 2 - y - z \end{cases} \Rightarrow |U| = \iiint_U dV = \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^{2-y-z} dx\,dz\,dy$

$$= \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} (2 - y - z)\,dz\,dy = \int_{-1}^1 \left[2z - yz - \frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{1-y^2} = \int_{-1}^1 2(1-y^2) - y(1-y^2) - \frac{1}{2}(1-y^2)^2\,dy$$

$$= \int_{-1}^1 2 - 2y^2 - \underset{\uparrow \text{ udda}}{y + y^3} - \frac{1}{2}(1 - 2y^2 + y^4)\,dy = \int_{-1}^1 \underset{\uparrow \text{ jämn}}{\frac{3}{2} - y^2 - \frac{1}{2}y^4}\,dy = \ldots$$

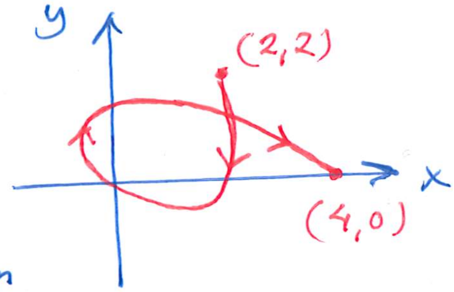
$$\ldots = 2\int_0^1 \frac{3}{2} - y^2 - \frac{y^4}{2}\,dy = 2\left[\frac{3y}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{10}\right]_{y=0}^{1}$$

$$= 2\cdot\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{10}\right) = 2\cdot\frac{45-10-3}{30} = \underline{\underline{\frac{32}{15}}} \text{ v.e.}$$

6 (a) Parametervektor:

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} 4t^3 + 3t^2 - 3t \\ -4t^3 + t^2 + 3t \end{pmatrix}, \quad \bar{r}(-1) = \begin{pmatrix} -4+3+3 \\ 4+1-3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

$$\bar{r}(1) = \begin{pmatrix} 4+3-3 \\ -4+1+3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$



Svar: Kurvan genomlöps från (2,2), startpunkt, till (4,0) slutpunkt.

(b) Vektorfältet $\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ x+y \end{pmatrix}$ är inte konservativt.
En direkt beräkning ger

$$\int_C (x+y)\,dy = \int_{t=-1}^{1} (x(t)+y(t))\frac{dy}{dt}\,dt = \int_{-1}^{1} 4t^2\cdot(-12t^2+2t+3)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{-48t^4}_{\text{jämn}} + \underbrace{8t^3}_{\text{udda}} + \underbrace{12t^2}_{\text{jämn}}\,dt = 2\int_0^1 -48t^4 + 12t^2\,dt$$

$$= 2\left[-\frac{48t^5}{5} + 4t^3\right]_{t=0}^{1} = 2\cdot 4\cdot\left(-\frac{12}{5}+1\right) = 8\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{56}{5}}}$$

(c) $\bar{F}$ är konservativt, ty $\bar{F} = \nabla\phi$ med potential

$$\phi(x,y) = x\ln(1+e^y) + \underbrace{C}_{\text{godtycklig konstant}}$$

Således

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \overset{\text{slut}}{\phi(4,0)} - \overset{\text{start}}{\phi(2,2)} = 4\ln(1+e^0) - 2\ln(1+e^2)$$

$$= \underline{\underline{4\ln 2 - 2\ln(1+e^2)}}$$

7 (a) Parametervektor: $\bar{r}(s,t) = s\cos t\,\hat{i} + s\sin t\,\hat{j} + 3e^{-s}\hat{k}$.

Tangentvektorer: Normalvektor:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -3e^{-s} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = \begin{pmatrix} -s\sin t \\ s\cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos t & \sin t & -3e^{-s} \\ -s\sin t & s\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin t\cdot 0 - (-3e^{-s})\cdot s\cos t \\ (-3e^{-s})\cdot(-s\sin t) - \cos t\cdot 0 \\ \cos t\cdot s\cos t - \sin t\cdot(-s\sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3se^{-s}\cos t \\ 3se^{-s}\sin t \\ s \end{pmatrix}$$

Orienterat ytelement:

$$\hat{N}dS = \pm\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right)ds\,dt = (+)\begin{pmatrix} 3se^{-s}\cos t \\ 3se^{-s}\sin t \\ \underset{\geq 0}{s} \end{pmatrix}ds\,dt = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3se^{-s}\cos t \\ 3se^{-s}\sin t \\ s \end{pmatrix}ds\,dt}}$$

(b) Eftersom ytans parametrisering är given, är det naturligt att försöka med en direkt beräkning. Flödet ges av

$$\iint_Y \bar{F}\cdot\hat{N}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} -(s\sin t)\cdot 3e^{-s} \\ (s\cos t)\cdot 3e^{-s} \\ 3e^{-s} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3se^{-s}\cos t \\ 3se^{-s}\sin t \\ s \end{pmatrix}ds\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3se^{-s}\,ds\,dt = 3\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 \underset{\to 1}{s}\,\overset{\to -e^{-s}}{e^{-s}}\,ds =$$

$$= 3\cdot 2\pi\left(\left[s(-e^{-s})\right]_{s=0}^{1} - \int_0^1 1\cdot(-e^{-s})\,ds\right) = 6\pi\left(-e^{-1} - \left[e^{-s}\right]_{s=0}^{1}\right)$$

$$= 6\pi\left(-e^{-1} - e^{-1} + 1\right) = \underline{\underline{6\pi\left(1 - \frac{2}{e}\right)}}$$