1 Uppgift 1

Låt P beteckna den punkt i $\mathbb{R}^3$ som har koordinaterna $(2, 1, -1)$.

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ellipsoiden $x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 10$ i punkten P.

(b) Låt C beteckna skärningskurvan mellan ellipsoiden i (a) och planet $x + 2y + 4z = 0$. Bestäm en tangentvektor till C i punkten P.

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 3

2 Uppgift 2

Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till
$f(x, y) = x^3 + x^2 + 4xy - 2y^2$.

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 4

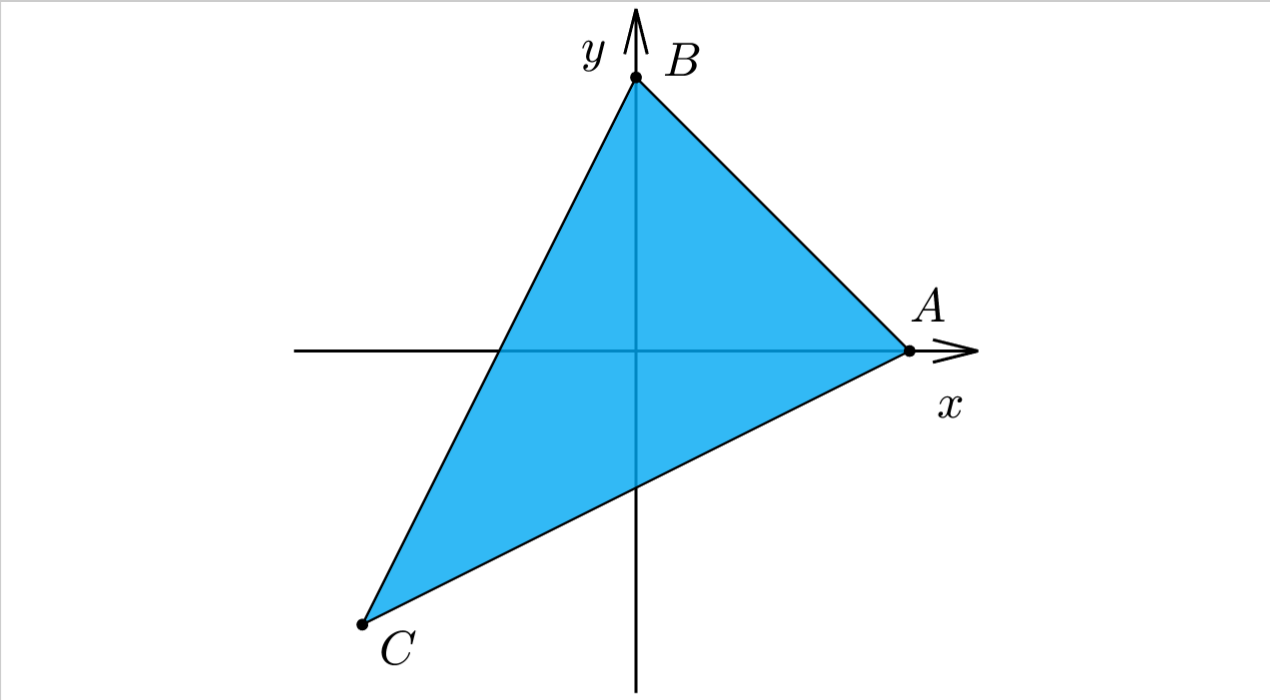
3 Uppgift 3

Bestäm maximum och minimum av $f(x, y) = x + y$ under bivillkoret $x^2 + 4y^2 = 4$.

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 3

4 Uppgift 4



Låt T beteckna det triangulära område i $\mathbb{R}^2$ vars hörn ligger i punkterna $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ och $C = (-1, -1)$.

(a) Beräkna integralen

$$\iint_T x^2 \, dA.$$

(4 p)

(b) Beräkna integralen

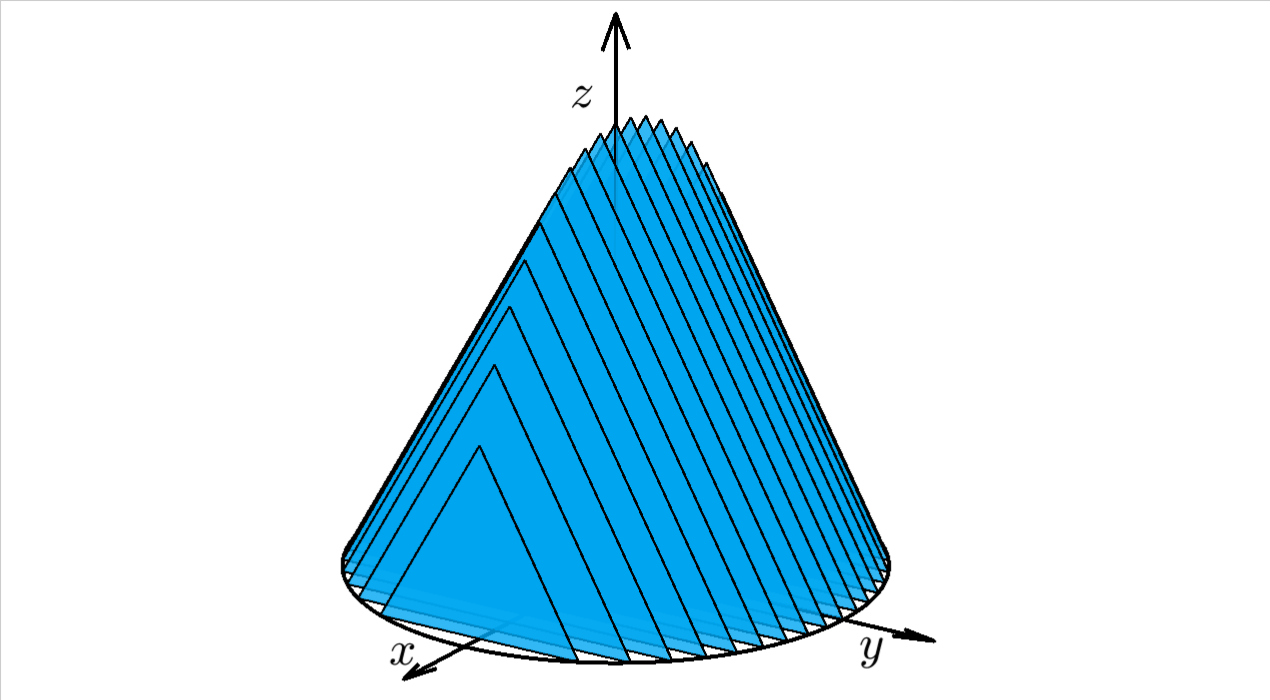
$$\iint_T y^2 \, dA.$$

(1 p)

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 5

5 Uppgift 5



Ett tält står rest på en cirkulär basyta $x^2 + y^2 \leq a^2$ med radie $a > 0$. Om man skivar tältet i x-led, så har varje tvärsnitt i plan parallella med yz-planet formen av en liksidig triangel (se figur).

(a) Vad är arean av en liksidig triangel? Antag att sidlängden är L och uttryck svaret i L.

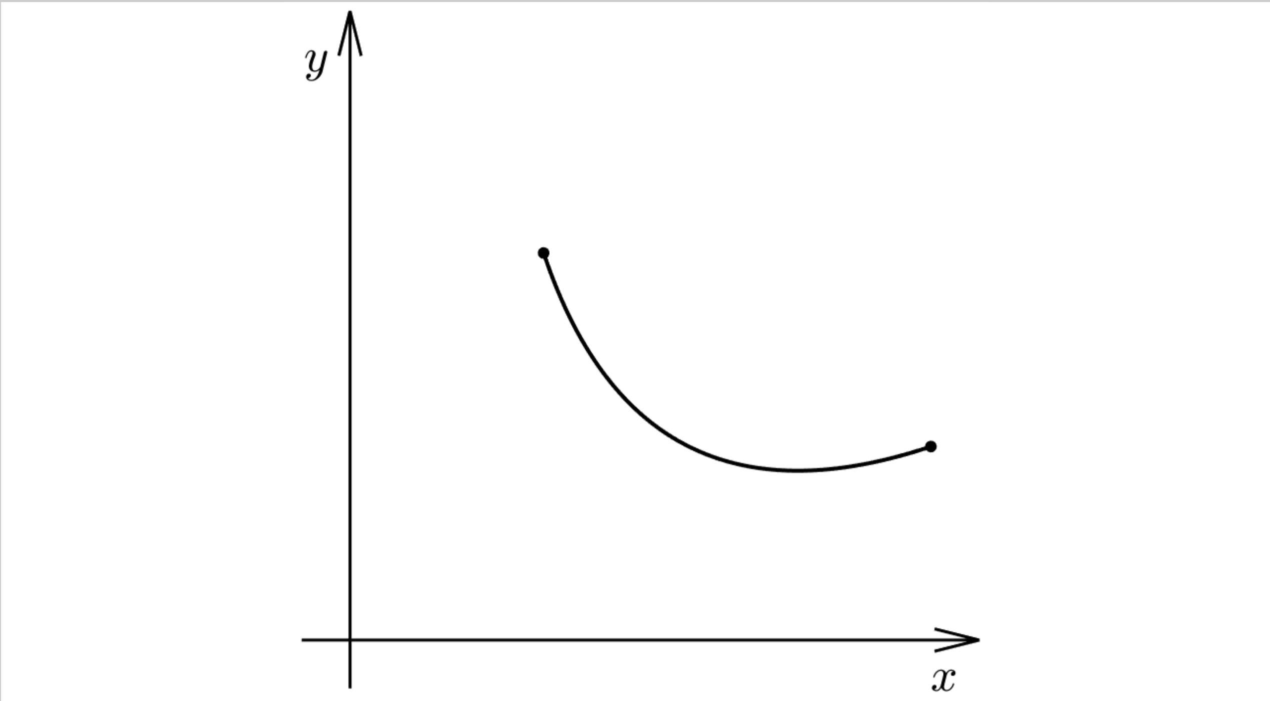
(b) Av figuren framgår att tvärsnittens storlek beror av x. Uttryck sidlängden L som en funktion av x.

(c) Beräkna tältets volym.

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 5

6 Uppgift 6



Låt C beteckna parameterkurvan i första kvadranten som definieras av

$$C\colon \begin{cases} x = t^2 - 3t + 3 \\ y = 2t^2 - t + 1 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

genomlöpt från $t = 0$ till $t = 1$.

(a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C x\,dy.$$

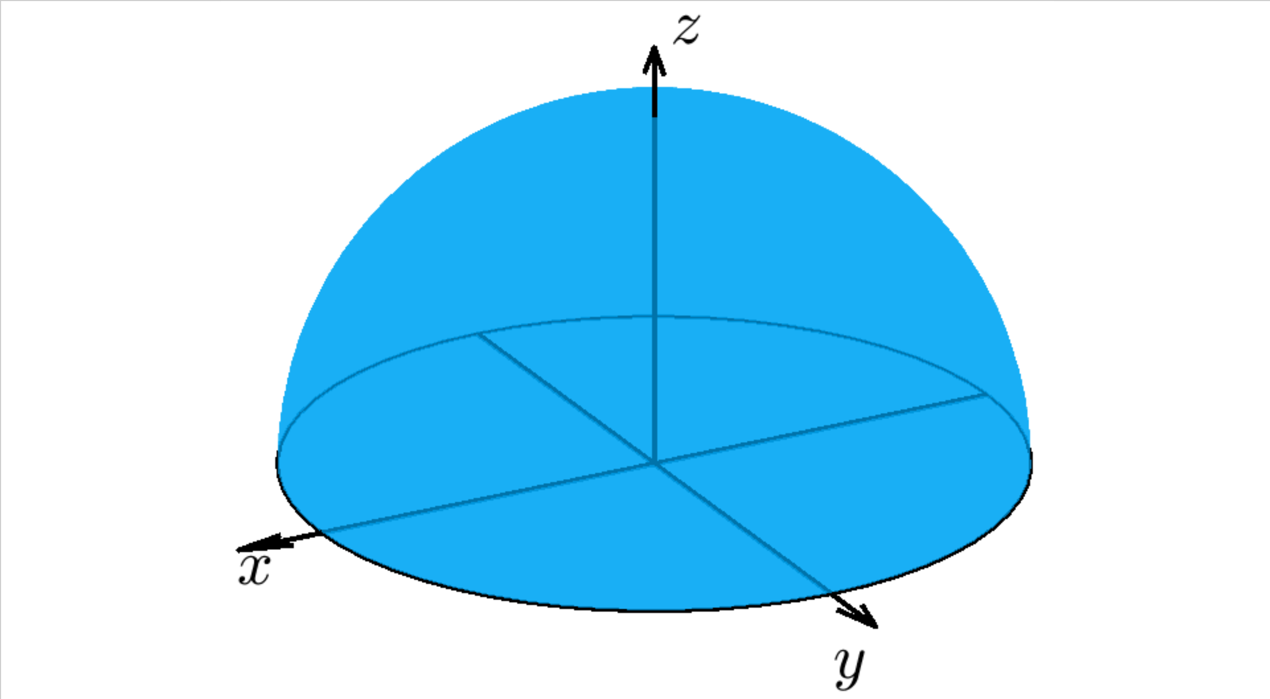
(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \frac{2x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}\,dy.$$

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 5

7 # Uppgift 7



Låt $\mathbf{F}$ beteckna vektorfältet
$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3 \sin z\,\mathbf{j} + 3y^2 \cos z\,\mathbf{k}.$

(a) Beräkna divergensen av $\mathbf{F}$. (1 p)

(b) Bestäm flödet av $\mathbf{F}$ genom halvsfären
$Y\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0,$
om Y är orienterad så att enhetsnormalen pekar bort från origo. (4 p)

Skriv ned lösningen på de särskilda skrivpapper som du blivit tilldelad. Obs! Fyll i ritningskod och tentamensinformation på varje inlämnat blad.

Totalpoäng: 5

Lösningsförslag

Tentamen i Flervariabelanalys

2025-05-28

1 $P=(2,1,-1)$

(a) Låt $f(x,y,z)=x^2+3y^2+3z^2$. Ellipsoiden är en nivåyta till f, ty $f(2,1,-1)=10$.

$$\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x\\6y\\6z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\3y\\3z\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(P)=2\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow \bar{N}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}$$ är en normalvektor till nivåytans tangentplan i P.

Tangentplanets ekv. fås av

$$\bar{N}_1\cdot\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-(-1)\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2(x-2)+3(y-1)-3(z+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x+3y-3z=10}$$

(b) $P=(2,1,-1)$ ligger i planet $x+2y+4z=0$. och har normalvektor $\bar{N}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$. En tangentvektor till C i P är ortogonal mot $\bar{N}_1$ och $\bar{N}_2$, t ex

$$\bar{v}=\bar{N}_1\times\bar{N}_2=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&3&-3\\1&2&4\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}12-(-6)\\-(8-(-3))\\4-3\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}18\\-11\\1\end{pmatrix}}}$$

2] $f(x,y) = x^3 + x^2 + 4xy - 2y^2$. Kritiska punkter:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 2x + 4y = 0 \\ f_y = 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ eller } x = -2$$

f har 2 st k.p. $(0,0)$ och $(-2,-2)$.

Andra ordningens derivator:

$$\begin{matrix} f_{xx} = 6x+2, & f_{xy} = 4 \\ f_{yx} = 4, & f_{yy} = -4 \end{matrix} \Rightarrow \underset{\text{Hessian}}{D^2 f(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x+2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Klassificering av $(0,0)$:

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(h,k) = 2h^2 + 8hk - 4k^2$$

$= 2\left((h+2k)^2 - 6k^2\right)$ växlar tecken! $\Rightarrow$

$\boxed{(0,0) \text{ sadelpunkt}}$

Klassificering av $(-2,-2)$:

$$D^2 f(-2,-2) = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(h,k) = -10h^2 + 8hk - 4k^2$$

$= -6h^2 - 4(k-h)^2$ negativt definit $\Rightarrow$

$\boxed{(-2,-2) \text{ lok. max.}}$

3] $f(x,y) = x + y$, $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi)$$

Vi parametriserar kurvan!

$$g(t) = f(2\cos t, \sin t) = 2\cos t + \sin t \Rightarrow$$

$$g'(t) = -2\sin t + \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 2\sin t$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = 2y \Rightarrow \boxed{x = 4y}$$ Insättning i kurvans ekv. ger

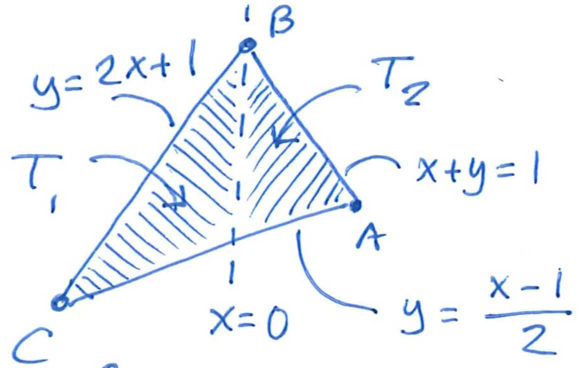
$$(4y)^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow 5y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$f_{max} = f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4+1}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

$$f_{min} = f\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-4-1}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{-\sqrt{5}}}$$

4 (a) Vi delar integrationsområdet T i två delar motsvarande $x<0$ och $x>0$.



$$\iint_T x^2\,dA = \iint_{T_1} x^2\,dA + \iint_{T_2} x^2\,dA$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{\frac{x-1}{2}}^{2x+1} x^2\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{\frac{x-1}{2}}^{1-x} x^2\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2 \underbrace{\left(2x+1-\frac{x-1}{2}\right)}_{=\frac{3x}{2}+\frac{3}{2}} dx + \int_{0}^{1} x^2 \underbrace{\left(1-x-\frac{x-1}{2}\right)}_{=\frac{3}{2}-\frac{3x}{2}} dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{0} x^3 + x^2\,dx + \frac{3}{2}\int_{0}^{1} x^2 - x^3\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\left(\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{1}\right) = \frac{3}{2}\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

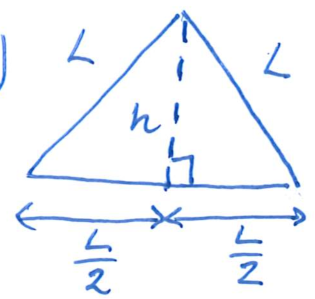
(b) Området T är symmetriskt m a p spegling i linjen $y=x$. Således

$$\iint_T f(x,y)\,dA = \iint_T f(y,x)\,dA$$

Om vi väljer $f(x,y)=y^2$ får vi

$$\iint_T y^2\,dA = \iint_T x^2\,dA = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

5 (a)

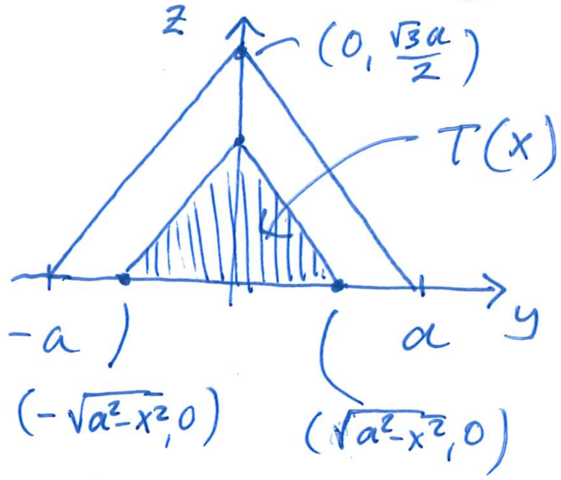


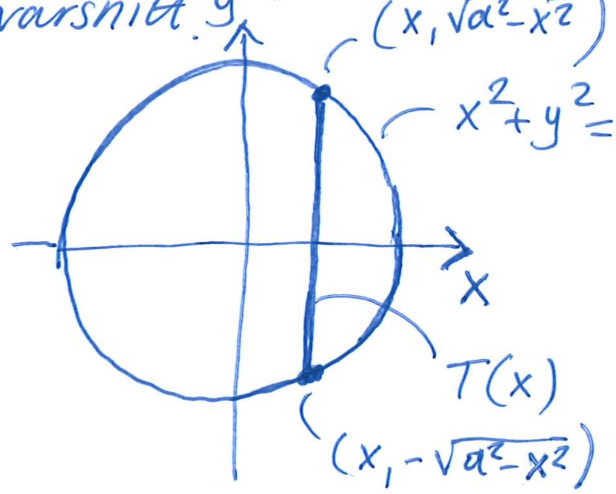
Pytagoras sats ger

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2 = L^2 \Rightarrow h = \underset{(-)}{+}\frac{\sqrt{3}L}{2}$$

Triangelns area: $A = \frac{bh}{2} = \frac{L\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}L}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}L^2}{4}}}$

(b) För x mellan $-a$ och a, låt $T(x)$ beteckna tältets triangulära tvärsnitt.





Varje sida av $T(x)$ har längden

$$L(x) = 2\sqrt{a^2-x^2}.$$

Således blir arean av $T(x)$

$$|T(x)| \overset{(a)}{=} \frac{\sqrt{3}}{4}L(x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 = \underline{\underline{\sqrt{3}\,(a^2-x^2)}}$$

c) Genom skivning i x-led fås tältets volym V enligt

$$V = \int_{-a}^{a}\left(\iint_{T(x)} dy\,dz\right)dx = 2\int_0^a |T(x)|\,dx$$

$$= 2\int_0^a \sqrt{3}(a^2-x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{a}$$

$$= 2\sqrt{3}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}}} \quad \text{v.e.}$$

6) $C: \begin{cases} x = t^2-3t+3 \\ y = 2t^2-t+1 \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$

(a) Vektorfältet $\bar{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ är inte konservativt, ty $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1-0 = 1 \neq 0$. En direkt beräkning ger

$$\int_C x\,dy = \int_{t=0}^{1} x(t)\frac{dy}{dt}\,dt = \int_0^1 (t^2-3t+3)(4t-1)\,dt$$

$$= \int_0^1 (4t^3-13t^2+15t-3)\,dt = 1-\frac{13}{3}+\frac{15}{2}-3 = \underline{\underline{\frac{7}{6}}}$$

(b) Vektorfältet $\bar{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ är konservativt med potential $\phi(x,y) = \ln(x^2+y^2)+C$, ty $\nabla\phi = \bar{F}$. Således

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \left[\phi(x(t),y(t))\right]_{t=0}^{1} = \phi(1,2)-\phi(3,1)$$

välj $C=0$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \ln(1^2+2^2)-\ln(3^2+1^2) = \ln 5 - \ln 10 = \underline{\underline{-\ln 2}}$$

7 (a) $\nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3 \sin z) + \frac{\partial}{\partial z}(3y^2 \cos z)$

$= 3x^2 + 3y^2 \sin z + 3y^2(-\sin z) = \underline{\underline{3x^2}}$

(b) Vi använder Gauss sats, men halvsfären är inte sluten, så vi sluter till den med en plan cirkulär yta i planet $z=0$.

$Y \cup B$ utgör då randen till halvklotet

$H: x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0$.

Enligt Gauss sats gäller då

$$\underbrace{\iint_Y \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS}_{=I_1} + \underbrace{\iint_B \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS}_{=I_2} = \iint_{\partial H} \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS = \underbrace{\iiint_H (\nabla \cdot \bar{F})\, dV}_{=I_3},$$

där

$$I_3 = \iiint_H 3x^2\, dV = 3 \iiint_H x^2\, dV = 3 \cdot \frac{1}{2} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^2\, dV$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^2+y^2+z^2\, dV = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} R^2 \cdot R^2 \sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4\pi \left[\frac{R^5}{5}\right]_{R=0}^{1} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{5}}}$$

$$I_2 = \iint_B \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \sin 0 \\ 3y^2 \cos 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx\,dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-3y^2)\, dx\,dy$$

$$= -3 \cdot \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2+y^2\, dx\,dy = -\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{1} r^2 \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{-\frac{3\pi}{4}}}$$

Svar: $I_1 = I_3 - I_2 = \frac{2\pi}{5} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{23\pi}{20}}}$