

Korta lösningar till tentan i s0008m den 27 augusti 2024

1. Eftersom $A \subset D$ har vi $P(A \cap D) = P(A)$. Så $P(A|D) = P(A)/P(D)$, där

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) \\ &= P(A) + P(B^c) - P(A) \cdot P(B^c) \\ &= 0.3 + 0.74 - 0.3 \cdot 0.26 \\ &= 0.482. \end{aligned}$$

Vi får

$$P(A|D) = 0.3/0.482 = 0.6224$$

2. Låt ξ stå för antal besökare på en dag. Enligt uppgift gäller att $\xi \in Po(50)$. Låt η stå för nettovinst på en dag. Då har vi $\eta = 35\xi - 300$. Sats 5.1 ger $V(\eta) = 35^2 V(\xi) = 35^2 \cdot 50$. Så standardavvikelsen blir $35\sqrt{50} = 247.4874$

3. Låt ξ stå för antalet defekta kort. Då gäller att $\xi \in Hyp(N, n, p)$, $N = 20$, $n = 6$, $p = 0.25$. Vi får

$$P(\xi \leq 1) = \sum_{x=0}^1 \frac{\binom{5}{x} \binom{15}{6-x}}{\binom{20}{6}} = 0.5165.$$

4. Vi beräknar väntevärde och varians från definitionen. Eftersom fördelningen är symmetrisk kring 0 blir väntevärdet $\mu = 0$ och vi får

$$\begin{aligned} V(\xi) &= (-a - 0)^2 P(\xi = -a) + (0 - 0)^2 P(\xi = 0) + (a - 0)^2 P(\xi = a) \\ &= a^2 \cdot 0.25 + a^2 \cdot 0.25 = a^2 \cdot 0.5 \end{aligned}$$

Villkoret $V(\xi) = 16$ ger ekvationen $a^2 = 32$ som har den positiva lösningen $a = \sqrt{32} \approx 5.66$.

5. Vi har

$$P(0 < \xi < 1) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 0.5e^{-x} dx = 0.5(1 - e^{-1}).$$

Eftersom f är symmetrisk runt 0 gäller att $P(-1 < \xi < 0) = P(0 < \xi < 1)$. Alltså har vi (eftersom $P(\xi = 0) = 0$) att

$$P(-1 < \xi < 1) = P(0 < \xi < 1) + P(-1 < \xi < 0) = (1 - e^{-1}) = 0.6321.$$

6. I $R(0, 2)$ -fördelningen är väntevärdet $\mu = 1$ och standardavvikelsen $\sigma = 2/\sqrt{12}$. Direkt uträkning ger

$$P(1 - 2/\sqrt{12} \leq \xi \leq 1 + 2/\sqrt{12}) = 2/\sqrt{12} = 0.577.$$

7. Låt ξ_i stå för antal bilar i hushåll i , $i = 1, 2, \dots, 500$. Beräkning av väntevärde och standardavvikelse från definitionen ger $\mu = E(\xi_i) = 0.6$ och $\sigma(\xi_i) = 0.6$. Enligt CGS gäller approximativt $\sum_{i=1}^{500} \xi_i \in N(400, \sqrt{500} \cdot 0.6)$. Vi får approximationen

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} \xi_i \leq 415\right) \approx 0.868.$$

8. Låt ξ stå för antal trasiga ljusblixtar av de 60. Då har vi $\xi \in \text{Bin}(60, p)$. Styrkan då $p = 0.075$ blir $P(\xi \geq 6 | p = 0.075) = 0.2935792$. (Poissonapproximation $\xi \in \text{Po}(60 \cdot 0.075)$ kan användas och då blir styrkan 0.297.)

9. Här får vi modellantaganden för Två stickprov (sid 246 i boken). Antalet frihetsgrader i t -fördelningen är lika med $n_1 + n_2 - 2$. Så det är 12 frihetsgrader i t -fördelningen.

10. Låt ξ vara antal fall där reaktionstiden är kortare efteråt. Då är $\xi \in \text{Bin}(10, p)$ där p är sannolikheten att en forskare förkastar H_0 . Vi har observerat $x = 3$. Eftersom vi har tvåsidig mothypotes får vi att P -värdet blir $\alpha_0 = 2 \cdot P(\xi \leq 3) = 1 - P(\xi \leq 1) = 0.3438$.

11. Låt ξ och η stå för de två personernas ankomsttid. Vi antar att ξ, η är oberoende och $R(13, 14)$ -fördelade. Det innebär att (ξ, η) är likformigt fördelat på kvadraten $[13, 14] \times [13, 14]$ i xy -planet. Att personerna träffas betyder att (ξ, η) ligger i ett sexkantigt område som innehåller diagonalen $x = y$. Områdes area är 0.8889. Sannolikheten att personerna träffas blir alltså 88.89 %.

12. Låt ξ_M, ξ_J stå för Majas respektive Joels utgifter och låt $\xi = \xi_M - \xi_J$. Vi söker $P(\xi > 0)$. Resultat från boken ger att

$$\xi \in N(15, \sqrt{31^2 + 24^2 - 2 \cdot 0.95 \cdot 31 \cdot 24}) = N(15, \sqrt{1234}).$$

Vi får $P(\xi > 0) = 0.9115$.

Del 2

13. Låt $\xi_a = 1$ om entreprenören får jobb a , $\xi_a = 0$ om entreprenören inte får jobb a . Om ξ_b, ξ_c definieras på liknande sätt kan vi skriva

$$\xi = \xi_a + \xi_b + \xi_c.$$

Vi har $E(\xi_a) = 0 \cdot P(\text{får inte jobb } a) + 1 \cdot P(\text{får jobb } a) = P(\text{får jobb } a) = 0.3$. På liknande sätt får vi $E(\xi_b) = 0.6, E(\xi_c) = 0.75$. Sats 5.1 ger nu

$$E(\xi) = E(\xi_a) + E(\xi_b) + E(\xi_c) = 1.65.$$