

Korta lösningar till tentan i s0008m den 17 mars 2025

1. Komplementregeln ger $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$ så additionsregeln ger $P(A^c \cap B^c) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0.3 + 0.56 - 0.14) = 0.28$.

2. Låt S_0, S_1 stå för 0 sänt respektive 1 sänt och låt M_0, M_1 stå för 0 mottaget respektive 1 mottaget. Vi får veta att $P(M_1|S_1) = 0.965$, $P(M_0|S_0) = 0.98$, $P(S_1) = 0.6$ och vi söker $P(S_1|M_1)$. Svar: 98.64%

3. Vi provar olika värden på x i

$$P(\xi = x) = \binom{11}{x} 0.15^x 0.85^{11-x}$$

och får att $x = 1$ ger störst sannolikhet.

4. Låt ξ_i vara livslängd för rör $i, i = 1, 2, \dots, 45$. Då gäller att $\xi = \sum_{i=1}^{45} \xi_i$ är den totala tid lagret räcker. CGS ger att ξ är approximativt $N(45 \cdot 220, \sqrt{45} \cdot 220) = N(375, 53.03301)$. Vi söker T så att $P(\xi \geq T) = 0.95$. Svar: $T \approx 7470$

5. Låt ξ = antal röda bollar i urvalet. Då gäller att $\xi \in Hyp(N, n, p)$, $N = 29, n = 4, p = 8/29$. Variansen blir $(N - n)np(1 - p)/N - 1 = 0.7134$ och standardavvikelsen $\sqrt{0.7134} = 0.84465$

6. Medianen m uppfyller $F(m) = 0.5$, dvs $(m - 2)^3 = 0.5 \implies m = 2 + 0.5^{1/3} = 2.79$.

7. Låt η = antal variabler av de 8, som är $< m$. Det gäller att $\eta \in Bin(11, 0.5)$. Vi har $P(m \text{ ligger utanför intervallet}) = 2P(\eta \leq 1) = 0.0703125$. Så konfidensgraden är $1 - 0.0703125 = 0.9297$.

8. Lämplig beslutsregel: förkasta H_0 om $\bar{\xi} > k$. Vi har villkoret för styrkan (här är $\eta \in N(0, 1)$):

$$P(\bar{\xi} > k | \mu = 12.5) = P\left(\eta > \frac{k - 10}{4.15/\sqrt{25}}\right) = 0.9.$$

Vi får

$$\frac{k - 12.5}{4.15/\sqrt{25}} = -\lambda_{0.1} \implies k = 12.5 - 1.2816 \cdot 4.15/5 = 11.43627.$$

Signifikansnivån blir

$$P(\bar{\xi} > 11.43627 | \mu = 10) = P\left(\eta \geq \frac{11.43627 - 10}{4.15/\sqrt{25}}\right) = 0.0418.$$

Kommentar: På tentan visades H_1 felaktigt som $H_1: \mu > 12.5$ (ska vara $\mu = 12.5$).

9. Eftersom det bara tas ett prov, har vi *inte* att göra med parvisa observationer och vi använder därför metoden med Två stickprov. Antalet frihetsgrader i t -fördelningen som ingår i konfidensintervallet (formel (8.11) sid 246) är $5 + 5 - 2 = 8$.

10. Här söks ett 99 % konfidensintervall för μ i $N(\mu, \sigma)$ där σ är okänd. Intervallet blir $\bar{x} \pm t_{0.005}(6)s/\sqrt{7} = 184 \pm 3.707 \cdot 16/\sqrt{7} = [161.58, 206.42]$.

11. Att ambulansen behöver färdas en sträcka som är högst 0.6 är samma sak som att olycksplatsen är inuti en kvadrat vars sida är $0.6\sqrt{2}$ och vars area alltså är $0.6^2 \cdot 2$. Eftersom platsen för olyckan är likformigt fördelad får vi

$$P(\text{ambulansen behöver färdas högst } 0.6) = 0.6^2 \cdot 2/\pi = 0.229.$$

12. Eftersom $Cov(\xi, \eta)$ kan skrivas $E(\xi \cdot \eta) - \mu_\xi \cdot \mu_\eta$ har vi

$$\begin{aligned} E(\xi \cdot \eta) &= Cov(\xi, \eta) + \mu_\xi \cdot \mu_\eta \\ &= \rho \cdot \sigma_\xi \cdot \sigma_\eta + \mu_\xi \cdot \mu_\eta \\ &= 0.3 \cdot 27 \cdot 24 + 515 \cdot 465 = 239669.4 \end{aligned}$$