

Korta lösningarna till tentan i s0008m den 18 mars 2024

1.

$$P(A|B^c) = P(A \cap B^c)/P(B^c) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = 0.176$$

2. $P(\xi \geq 2|\xi > 1) = P(\xi \geq 2)/P(\xi > 1) = (1 - \Phi(2))(1 - \Phi(1)) = 0.1434$.

3. Låt A_i vara händelsen att slinga nummer i fungerar efter 3 år. Då gäller att händelserna $A_1, \dots, A_{25}$ är oberoende, $P(A_i) = 0.97$. Vi söker $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{25})$. Oberoendet ger $P(A_1 \cap \dots \cap A_{25}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_{25}) = 0.97^{25} = 0.46697$.

4. Att $\eta = 15$ är samma sak som att $2\xi = 12$, dvs $\eta = 15 \iff \xi = 6$. Så $P(\eta = 15) = P(\xi = 6) = \lambda^6 e^{-\lambda}/6! = (2.2)^6 e^{-2.2}/6! = 0.0174$.

OBS att η inte har Poissonfördelning. För de möjliga värdena på η är ju de udda heltalen 5, 7, 9, 11, 13. Och vi har $E(\eta) = 7.4 \neq V(\eta) = 8.8$.

5. Om ξ har tviangelfördelning på $[-1, 1]$ så har ξ samma fördelning som $\xi_1 + \xi_2$ där ξ_1 och ξ_2 är oberoende och $R(-0.5, 0.5)$ -fördelade. Sats 5.1 ger därför $V(\xi) = V(\xi_1) + V(\xi_2) = 1/12 + 1/12 = 2/12 = 1/6$.

6. Frekvensfunktionen f blir $f(x) = F'(x) = 2x/5, 2 \leq x \leq 3, f(x) = 0$ annars, och vi får $E(\xi) = \int_2^3 x \cdot 2x/5 dx = 38/15$.

7. Informationen om Hypergeometrisk fördelning som t.ex. finns på formelbladet ger $\mu = E(\xi_i) = 1$ och $\sigma(\xi_i) = 0.57735$. Enligt CGS gäller därför approximativt $\sum_{i=1}^{40} \xi_i \in N(40, \sqrt{40} \cdot 0.57735) = N(40, 3.651484)$. Vi får

$$P\left(\sum_{i=1}^{40} \xi_i \leq 45\right) \approx 0.9145.$$

8. Här vill vi testa $H_0 : \mu = 126$ mot $H_1 : \mu < 126$ på 2.5% sign. nivå, där μ är den genomsnittliga tillverkningstiden. Beslutsregeln som baseras på z blir: förkasta H_0 då $z < k$. Då H_0 är sann har z en $N(0, 1)$ -fördelning. Så $k = -\lambda_{0.025} = -1.96$

9. Här anges modellantagandena för Två stickprov. Konfidensintervallet (sid 246 i boken) med $1 - \alpha = 0.9$ har nedre gräns 0.533.

10. Låt ξ = antal studenter av de 15 tillfrågade som motionerar minst 3 gånger i veckan. Då gäller att $\xi \in \text{Bin}(15, p)$ där p är andelen studenter på universitetet som motionerar minst 3 gånger i veckan. Styrkan då $p = 0.8$ är $P(\text{förkasta } H_0 | p = 0.8) = P(\xi \geq 12 | p = 0.8) = 1 - P(\xi \leq 11 | p = 0.8) = 0.64816$.

11. Fördelningen för majas betyg (ξ), givet att Joels betyg (η) 4, är

$$P(\xi = 3 | \eta = 4) = 0.02/0.42, P(\xi = 4 | \eta = 4) = 0.27/0.42, P(\xi = 5 | \eta = 4) = 0.13/0.42.$$

Det betingade väntevärdet blir $\sum_{x=3}^5 x P(\xi = x | \eta = 4) = 4.26$.

12. Lösning 1. Sats 5.1 ger att $E(\eta) = E(\zeta) = 2$. Så

$$Cov(\eta, \zeta) = E(\eta, \zeta) - 4.$$

Sats 5.1 ger

$$E(\eta \cdot \zeta) = E((\xi_1 + \xi_2) \cdot 2\xi_1) = 2E(\xi_1 \cdot \xi_1) + 2E(\xi_1 \cdot \xi_2).$$

Det gäller att $E(\xi_1^2) = V(\xi_1) + (E(\xi_1))^2 = 1 + 1 = 2$ (sats 4.3) så den första termen är 4. Den andra termen är $2 \cdot E(\xi_1) \cdot E(\xi_2) = 2 \cdot 1 \cdot 1$ eftersom ξ_1, ξ_2 är oberoende. Alltså har vi $Cov(\eta, \zeta) = E(\eta, \zeta) - 4 = 6 - 4 = 2$.

Lösning 2. Eftersom Cov är linjär i argumenten gäller att

$$\begin{aligned} Cov(\eta, \zeta) &= Cov(\xi_1 + \xi_2, \zeta) = Cov(\xi_1, \zeta) + Cov(\xi_2, \zeta) \\ &= 2Cov(\xi_1, \xi_1) + 2Cov(\xi_2, \xi_1). \end{aligned}$$

Den första termen är $2 \cdot V(\xi_1) = 2 \cdot 1$. Den andra termen är 0 eftersom ξ_1, ξ_2 är oberoende. Så $Cov(\eta, \zeta) = 2$.

13. Vi vill testa H_0 : 'vaccinerade har inte minskad risk att smittas' mot H_1 : 'vaccinerade har minskad risk att smittas'. Låt ξ vara antal personer av de smittade som är ovaccinerade. Om H_0 är sann gäller att $\xi \in Bin(95, 0.5)$. Vi har observerat $\xi = 90$. P-värdet blir $P(\xi \geq 90 | \xi \in Bin(95, 0.5)) \approx 0$. Så vi kan med mycket låg felrisk påstå att vaccinerade har minskad risk att smittas.

14. Vi söker $P(\max(\zeta, \eta) > 0.7)$. Vi har

$$P(\max(\zeta, \eta) > 0.7) = 1 - P(\max(\zeta, \eta) \leq 0.7) = 1 - P(\zeta \leq 0.7, \eta \leq 0.7).$$

Att $\xi_1, \dots, \xi_4$ medför att ζ, η är oberoende. Så

$$P(\max(\zeta, \eta) > 0.7) = 1 - P(\zeta \leq 0.7) \cdot P(\eta \leq 0.7).$$

Vi har $P(\eta \leq 0.7) = 1 - P(\eta > 0.7)$

$$= 1 - P(\xi_3 > 0.7, \xi_4 \leq 0.7) = 1 - P(\xi_3 > 0.7) \cdot P(\xi_4 \leq 0.7) = 1 - 0.3^2.$$

Vi har $P(\zeta \leq 0.7, \eta \leq 0.7) = P(\zeta \leq 0.7)P(\eta \leq 0.7) = 0.7^2$. Så

$$P(\max(\zeta, \eta) > 0.7) = 1 - 0.7^2 \cdot (1 - 0.3^2) = 0.5541.$$