

### Korta lösningar till tentan i s0008m den 30 maj 2024

1. Vi söker  $P(A|D) = P(A \cap D)/P(D)$ . Att  $A \subset D$  medför att  $A \cap D = A$ . Så  $P(A|D) = P(A)/P(D)$ . Vi har  $P(D) = 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c)$  och eftersom de ingående händelserna är oberoende får vi

$$P(D) = 1 - P(A^c)P(B^c)P(C^c) = 1 - 0.7 \cdot 0.26 \cdot 0.4 = 0.9272.$$

Vi får nu  $P(A|D) = 0.3/0.9272 = 0.32355$ .

2. Låt  $\xi$  stå för partikelns hastighet i  $x$ -led. Enligt uppgift gäller att  $\xi \in N(0, 2.17)$ . Rörelseenergin blir  $\eta = m\xi^2/2$  där  $m = 6.39 \cdot 10^{-23}$ . Sats 5.1 ger  $E(\eta) = m \cdot E(\xi^2)/2$ . Eftersom  $E(\xi) = 0$  har vi  $V(\xi) = E(\xi^2) \Rightarrow E(\xi^2) = 2.17^2$ . Vi får  $m \cdot E(\xi^2)/2 = 6.39 \cdot 10^{-23} \cdot 2.17^2/2 = 15.04494 \cdot 10^{-23}$ .

3. Låt  $\xi$  stå för antal fartyg som anländer på en dag och låt  $\eta$  stå för antal dagar under 7-dagarsperioden då man måste kalla in extrapersonal. Då gäller att  $\eta \in Bin(7, p)$  där  $p = P(\xi > 5)$ . Enligt uppgift gäller att  $\xi \in Po(3)$  så  $p = P(\xi > 5) = 1 - P(\xi \leq 5) = 0.0839$ . Vi får nu med räknarens hjälp att den sökta sannolikheten är  $P(\xi \geq 2) = 1 - P(\eta \leq 1) = 1 - 0.8886115 = 0.1113885$

4. Vi beräknar väntevärde och varians från definitionen av väntevärde och varians. Eftersom fördelningen är symmetrisk kring 0 blir väntevärdet  $\mu = 0$ . Vi får

$$\begin{aligned} V(\xi) &= (-a - 0)^2 P(\xi = -a) + (0 - 0)^2 P(\xi = 0) + (a - 0)^2 P(\xi = a) \\ &= a^2 \cdot 1/3 + a^2 \cdot 1/3 = a^2 \cdot 2/3 \end{aligned}$$

Villkoret  $V(\xi) = 4$  ger ekvationen  $a^2 \cdot 2/3 = 4$  som har den positiva lösningen  $a = \sqrt{6} \approx 2.45$ .

5. Låt  $\xi$  stå för den tid som hantverksarbetet tar. Enligt uppgift gäller att  $\xi \in Exp(\lambda)$  där väntevärdet  $1/\lambda = 4$ . Efter att Anna köpt busskort har hon 2900. För att hon ska ha råd att betala arbetet får arbetet max ta 3 timmar. (Om arbetet t.ex. tar 3 timmar och 10 minuter debiteras en fjärde timme.) Så  $P(\text{Anna har råd att betala arbet och busskort}) = P(\xi < 3) = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-3/4} = 0.5276$ .

6. Vi inför en tallinje med origo i en av gatstumpens ändpunkter och låter  $\xi$  vara avståndet från den ändpunkten till den närmaste del av den parkerande bilen. Vi antar att  $R(0, 7)$ . Det får plats en bil till om  $\xi > 5$  eller om  $\xi < 2$ . Sannolikheten för detta blir  $2/7 + 2/7 = 4/7 = 0.5714$ .

7. Enligt CGS gäller approximativt  $\sum_{i=1}^{30} \xi_i \in N(30\mu, \sqrt{30}\sigma)$ , där  $\mu = E(\xi_i)$ ,  $\sigma^2 = V(\xi_i)$ . Vi får  $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2/3$  och

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 = 2 \int_0^1 x^3 dx - (2/3)^2 = 1/2 - (2/3)^2,$$

dvs  $\sum_{i=1}^{30} \xi_i$  är approximativt  $N(20, 1.29)$ -fördelad. Det ger oss approximationen  $P(\xi > 22) \approx 6.1\%$

**8.** Här har vi ett stickprov  $\xi_1, \dots, \xi_{25}$  från  $N(\mu, 12)$  och vi vill testa  $H_0: \mu = 185$  mot  $H_1: \mu = 195$ . Beslutsregeln som baseras på medelvärdet  $\bar{\xi}$  blir: förkasta  $H_0$  om  $\bar{\xi} > k$ . Villkoret att  $\alpha = P(\bar{\xi} > k | \mu = 185)$  ger  $k = 185 + 12 * \lambda_{0.1} / \sqrt{(25)} = 185 + 12 \cdot 1.2816 / \sqrt{25} = 188.0758$ .

**9.** Här måste *stickprov i par* användas eftersom vi gör mätningar vid olika tider på dygnet. Det 95 % intervallets nedre gräns blir  $-0.119$ . (Medelvärde och standardavvikelse för differenserna blir  $\bar{z} = 0.3666667$  och  $s_z = 0.4633213$ .)

**10.** Låt  $\xi$  vara antalet röda bollar i urvalet. Då gäller att  $\xi \in Hyp(N, n, p)$ ,  $N = 5000$ ,  $n = 10$  och där  $p$  är andelen som testet gäller. Eftersom  $n/N < 1/10$  kan vi använda approximationen  $yp(N, n, p) \approx Bin(n, p)$ . Styrkan då  $p = 0.4$  blir approximativt  $P(\xi \geq 3 | \xi \in Bin(10, 0.4)) = 1 - P(\xi \leq 2 | \xi \in Bin(10, 0.4)) = 1 - 0.1673 = 0.8327$ . (Obs att villkoret för normalapproximation *inte* uppfylls här.)

**11.** Vi vet från ett exempel i boken att den betingade fördelningen för  $\xi$  då  $\eta = 0.8$  är en  $R(-\sqrt{1 - 0.8^2}, \sqrt{1 - 0.8^2})$ -fördelning, dvs en  $R(-0.6, 0.6)$ -fördelning. Formelbladet ger att variansen i den fördelningen är  $(0.6 - (-0.6))^2 / 12 = 1.2^2 / 12 = 0.12$ .

**12.** Vi bestämmer först marginalfördelningarna. Det gäller att

$$P(\xi = 0) = P(\xi = 0, \eta = 0) + P(\xi = 0, \eta = 1) = 0.185 + 0.165 = 0.35,$$

$$P(\xi = 1) = P(\xi = 1, \eta = 0) + P(\xi = 1, \eta = 1) = 0.14 + 0.51 = 0.65.$$

Direkt uträkning ger

$$E(\xi) = 0.65, \quad V(\xi) = 0.65 \cdot 0.35.$$

På liknande sätt får vi

$$P(\eta = 0) = 0.325, P(\eta = 1) = 0.675, E(\eta) = 0.675, V(\eta) = 0.675 \cdot 0.325$$

Kovariansen  $Cov(\xi, \eta)$  blir

$$E(\xi \cdot \eta) - (E(\xi) \cdot E(\eta))$$

där  $(E(\xi) \cdot E(\eta)) = 0.65 \cdot 0.675$  och där

$$E(\xi \cdot \eta) = \sum_{x=0,1,y=0,1} xyp(x, y).$$

Alla termer i denna summa är 0 förutom termen då  $x = y = 1$ , dvs

$$E(\xi\eta) = p(1, 1) = 0.51.$$

Korrelationen,  $\rho(\xi, \eta)$ , blir

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{Cov(\xi, \eta)}{\sqrt{V(\xi) \cdot V(\eta)}} = \frac{0.51 - 0.65 \cdot 0.675}{\sqrt{0.65 \cdot 0.35 \cdot 0.325 \cdot 0.675}} = 0.3189.$$

Korrelationen blir

$$P(\eta = 0) = 0.325, P(\eta = 1) = 0.675, E(\eta) = 0.675, V(\eta) = 0.675 \cdot 0.325$$