

Korta lösningar till del 1 av tentan i s0008m den 24 oktober 2025

1. Sannolikheten för exakt ett fel är

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Vi har $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.07$. Så $P(\{\text{exakt ett fel}\}) = 0.1 + 0.2 - 0.14 = 0.16$.

2. Inför händelserna A, B, C för att ett batteri kommer från respektive fabrik och H =batteri håller 100 timmar. Lagen om total sannolikhet ger

$$\begin{aligned} P(H) &= P(H|A)P(A) + P(H|B)P(B) + P(H|C)P(C) \\ &= 0.53 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.95 + 0.27 \cdot 0.96 \\ &= 0.9262 \end{aligned}$$

3. Låt positionen efter 8 steg vara ξ och låt η vara antal steg i positiv riktning. Att avståndet från 0 efter 8 steg är ≥ 4 är samma sak som att ξ är ≤ -4 eller ≥ 4 vilket är samma sak som att $\eta \geq 6$ eller $\eta \leq 2$. Eftersom $\eta \in \text{Bin}(8, 0.5)$ får vi $P(\text{avståndet minst } 2) = P(\eta \geq 6 \text{ eller } \eta \leq 2) = 2 \cdot P(\eta \leq 2) = 0.2890625$.

4. Håkans genomsnittliga konsumtion motsvaras av

$$E(\xi) = \sum_{x=0}^3 x \cdot P(\xi = x) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.1 = 1.5.$$

Håkans kostnad kan skrivas $\eta = 12.5\xi$. Hans genomsnittliga kostnad motsvaras av $E(\eta)$ och satsen om linjära funktioner ger $E(12.5\xi) = 12.5 \cdot 1.5 = 18.75$.

5. I $N(\mu, \sigma)$ -fördelningen är medianen lika med μ . Den 95e percentilen kan skrivas

$$\mu + \lambda_{0.95} \cdot \sigma.$$

Alltså gäller

$$8 + 1.6449 \cdot \sigma = 12.5,$$

dvs $\sigma = 4.5/1.6449 = 2.735729$.

6. Låt ξ_i vara längd för länk nr i . Här är $\xi_i \in R(0.5, 1.5)$ så formelbladet eller boken ger $\mu = E(\xi_i) = 1, \sigma = 1/\sqrt{12}$. Kedjans längd blir $\sum_{i=1}^{100} \xi_i$ och CGS ger approximationen

$$\sum_{i=1}^{100} \xi_i \in N(100\mu, \sqrt{100} \cdot \sigma) = N(100, 10/\sqrt{12}).$$

Vi får $P(\sum_{i=1}^{100} \xi_i \leq 105) = 0.9583677$.

7. Att det i genomsnitt dröjer 10 minuter mellan block betyder att det i genomsnitt läggs till 6 block per timme. Dvs om ξ står för antal block på en timme så har vi $\xi \in Po(\lambda)$ där $E(\xi) = 6 \implies \lambda = 6$. Poisson-tabellen ger $P(\xi > 5) = 1 - P(\xi \leq 5) = 1 - 0.44568 = 0.554$.

8. Styrkefunktionen för testet blir

$$P(\bar{\xi} > 2.2396 \mid \bar{\xi} \in N(\mu, 2/\sqrt{10})) = P(\eta > \frac{2.2396 - \mu}{2\sqrt{10}} \mid \eta \in N(0, 1)).$$

Så det ska gälla att

$$P(\eta > \frac{2.2396 - \mu}{2\sqrt{10}} \mid \eta \in N(0, 1)) = 0.9.$$

Med hjälp av normalfördelningstabell får vi

$$\frac{2.2396 - \mu}{2\sqrt{10}} = -\lambda_{0.1}.$$

Vi löser för μ och får $\mu = 2.2396 + 2/\sqrt{10} = 3.05$.

9. Från formelbladet eller boken får vi att t har en $t(12)$ -fördelning då H_0 är sann. Så vi behöver $k = t_{0.1}(12) = 1.356$.

10 Eftersom vi inte har normalfördelning används teckenintervall. Konfidensgraden för $[\xi(3), \xi(6)]$ blir 71.1 %.

Kommentar: Denna uppgift gav 2 poäng.

11 Villkoret för en frekvensfunktion är

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = 1. \quad (1)$$

För $0 < y < 1$ har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 c x dx = c/2,$$

så integralen i (1) blir $\int_0^1 (c/2) dy = c/2$. Alltså måste $c = 2$, dvs

$$f(x, y) = 2x, 0 \leq x, y \leq 1, f(x, y) = 0 \text{ annars}. \quad (2)$$

Kommentar: Integralen i (1) kan bestämmas genom att tolka den som en volym.

Lösning 1: Händelsen $\{\xi \leq 0.6, \eta \leq 0.4\}$ kan skrivas $\{(\xi, \eta) \in A\}$ där

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 0.6, 0 \leq y \leq 0.4\}.$$

Vi får nu

$$P((\xi, \eta) \in A) = \int \int_A f(x, y) dx dy = \int_0^{0.4} \left(\int_0^{0.6} 2x dx \right) dy = 0.144.$$

Kommentar: Även integralen i (2) kan bestämmas mha volymstolkning.

Lösning 2: Frekvensfunktionen i (2) kan skrivas som produkten $f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)$ där $f_{\xi} = 2x, 0 \leq x \leq 1$, och där f_{η} är frekvensfunktionen för $\eta \in R(0, 1)$. Det betyder att ξ och η är oberoende. Vi får därför

$$P(\xi \leq 0.6, \eta \leq 0.4) = \underbrace{P(\xi \leq 0.6)}_{\int_0^{0.6} 2x dx = 0.6^2} \cdot \underbrace{P(\eta \leq 0.4)}_{0.4} = 0.6^2 \cdot 0.4 = 0.144.$$

12 Låt ξ och η stå för Joel respektive Majas utgifter. En sats om tvådimensionell normalfördelning (sats 11.4) ger den betingade fördelningen för η , givet att $\xi = 430$, är

$$N(470 + 0.6 \cdot \frac{32}{22}(430 - 440), \sqrt{1 - 0.6^2} \cdot 32).$$

Så det betingade väntevärdet är $470 + 0.6 \cdot \frac{32}{22}(430 - 440) = 461.27$.

del 2

13 Vi vill testa H_0 : "vaccinet har ingen effekt" mot H_0 : "vaccinet minskar risken att smittas". Testvariabel blir ξ =antal personer av de 95 smittade som fått vaccin. Då H_0 är sann gäller att $\xi \in \text{Bin}(95, 0.5)$. Eftersom vi har observerat $x = 3$ blir P-värdet $\alpha_0 = P(\xi \leq 3 | \xi \in \text{Bin}(95, 0.5)) \approx 0$. Så vi kan förkasta H_0 på med väldigt låg felrisk.

14 Låt ξ var antal röda bollar i urvalet och låt η vara antal prickar på tärningen. Givet att $\eta = y$ gäller att $\xi \in \text{Hyp}(N, n, p)$, där $N = y + 10, n = 5, p = 10/(y + 10)$. Så

$$E(\xi | \eta = y) = n \cdot p = 50/(10 + y).$$

Lagen om total förväntan ger nu

$$\begin{aligned} E(\xi) &= E(\xi | \eta) = E(50/(10 + \eta)) \\ &= \sum_{y=1}^{10} P(\eta = y) 50/(10 + y) \\ &= \sum_{y=1}^{10} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10 + y} = 3.764673. \end{aligned}$$

15 Vi bestämmer fördelningsfunktionen $F_\zeta(z) = P(\zeta \leq z)$. Vi har

$$P(-\ln(\xi) \leq z) = P(\ln(\xi) \geq -z) = 1 - P(\ln(\xi) \leq -z) = 1 - P(\xi \leq e^{-z}),$$

där $P(\xi \leq e^{-z}) = e^{-z}$ eftersom $\xi \in R(0, 1)$. Alltså har vi $F_\zeta(z) = 1 - e^{-z}, z > 0$, $F_\zeta(z) = 0$ annars. Frekvensfunktionen $f_\zeta(z) = F'_\zeta(z) = e^{-z}, z > 0$, $f_\zeta(z) = 0$ annars. Vi ser att $\zeta \in \text{Exp}(1)$.