

### Korta lösningar till tentan i s0008m den 26 oktober 2024

1. Låt  $K$  och  $D$  stå för händelsen att en enhet är kasserad respektive defekt. Vi söker  $P(D|K)$ . Bayes sats ger

$$P(D|K) = \frac{P(K|D)P(D)}{P(K)},$$

där

$$P(K) = P(K|D)P(D) + P(K|D^c)P(D^c) = 0.93 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.99 = 0.0192.$$

Vi får

$$P(D|K) = \frac{0.93 \cdot 0.01}{0.0192} = 0.484375.$$

2. Låt  $\eta$  stå för böterna. Då gäller att  $\eta = 0, 25\,000, 40\,000$ , där  $P(\eta = 0) = 0.5, P(\eta = 25\,000) = 0.3, P(\eta = 40\,000) = 0.2$ . Vi får  $\mu = E(\eta) = 0 \cdot 0.5 + 25\,000 \cdot 0.3 + 40\,000 \cdot 0.2 = 15500$ ,

$$V(\eta) = (0 - 15500)^2 \cdot 0.5 + (25\,000 - 15500)^2 \cdot 0.3 + (40\,000 - 15500)^2 \cdot 0.2 = 267250000$$

och  $\sigma(\eta) = 16347.78$ .

Kommentar: Problemet liknar uppgift 3.41 i boken. Men eftersom det här gäller att 0 är ett möjligt värde på  $\xi$  så kan man inte skriva böterna  $15\,000\xi + 10000$  och använda satsen om linjära funktioner. (Gör man det får man det inkorrekta svaret att standardavvikelsen för  $15\,000\xi + 10000$  blir  $15\,000 \cdot \sqrt{0.61} = 11715.37$ .)

3. *Lösning 1:* Att  $\xi = 5$  betyder att det femte kastet gav klave med de första fyra kasten inte gav klave. Sannolikheten för det är  $0.5^5$ . Mer allmänt gäller att  $P(\xi = x) = 0.5^x$ . Vi får  $P(3 \leq \xi \leq 5) = \sum_{i=3}^5 0.5^i = 0.21875$ .

*Lösning 2:* Eftersom  $\xi$  endast kan anta heltalsvärden gäller att

$$P(3 \leq \xi \leq 5) = P(\xi \leq 5) - P(\xi \leq 2).$$

Komplementet till  $(\xi \leq 5)$  är  $(\xi \geq 6)$ . Att  $\xi \geq 6$  betyder att de första 5 kasten ger krona. Sannolikheten för detta är  $0.5^5$ . Så  $P(\xi \leq 5) = 1 - 0.5^5$ . På liknande sätt får vi  $P(\xi \leq 2) = 1 - 0.5^2$  och till slut

$$0.5^2 - 0.5^5 = 0.21875.$$

4. Vi standardiserar  $\eta = (\xi - \mu)/\sigma$  och får

$$P\left(\eta > \frac{1.07 - \mu}{\sigma}\right) = 0.09,$$
$$P\left(\eta < \frac{0.91 - \mu}{\sigma}\right) = 0.03$$

Tabell eller räknare ger nu ekvationerna

$$\frac{1.07 - \mu}{\sigma} = \lambda_{0.09} \approx 1.34,$$
$$\frac{0.91 - \mu}{\sigma} = -\lambda_{0.03} \approx -1.88.$$

Lösning av ekvationerna ger:  $\sigma = 0.05$

5. Vi har

$$P(\xi_1 > 1 + \xi_2) = P(\xi_1 - \xi_2 > 1),$$

där  $\xi_1 - \xi_2 \in N(0, \sqrt{2})$  enligt sats 6.2. Vi får därför

$$P(\xi_1 > 1 + \xi_2) = 1 - \Phi(1/\sqrt{2}) = 0.23975.$$

( $1 - \Phi(0.71) \approx 0.2389$  accepteras.)

6. Eftersom exponentialfördelningen saknar minne (exempel 4.5 i boken) gäller att

$$P(2 \leq \xi \leq 3 | \xi \geq 1) = P(1 \leq \xi \leq 2).$$

Vi använder fördelningsfunktionen  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  och får

$$P(1 \leq \xi \leq 2) = F(2) - F(1) = e^{-1} - e^{-2} = 0.2325.$$

7. CGS ger att  $\xi$  = den tid det tar att få 50 fiskar är approximativt  $N(50 \cdot 1/7.5, \sqrt{50} \cdot 1/7.5) = N(375, 53.03301)$ . Det ger approximationen  $P(\xi \geq 480) \approx 0.024$ .

8. Lämplig beslutsregel: förkasta  $H_0$  om  $\bar{\xi} > k$ . Vi får villkoren (här är  $\eta \in N(0, 1)$ )

$$P\left(\eta > \frac{k - 10}{0.55/\sqrt{n}}\right) = 0.05,$$

$$P\left(\eta > \frac{k - 10.2}{0.55/\sqrt{n}}\right) = 0.9$$

Vi får

$$\frac{k - 10}{0.55/\sqrt{n}} = \lambda_{0.05},$$

$$\frac{k - 10.2}{0.55/\sqrt{n}} = -\lambda_{0.1}.$$

Lösning av ekvationerna och avrundning av  $n$  uppåt ger: 65

9. Eftersom facklorna testas då de yttre förhållandena förändras måste vi göra parvisa jämförelser, dvs vi använde metoden med stickprov i par. Konfidensintervallets övre gräns blir 24.14.

10. Låt  $\xi$  vara antal intervall som täcker sin konstant. Då är  $\xi \in \text{Bin}(14, 0.9)$ . Den sökta sannolikheten är  $P(\xi \geq 11) = 1 - P(\xi \leq 10) = 0.9558$ .

11. Frekvensfunktionen  $f(x, y)$  för  $(\xi, \eta)$  är 1 då  $0 < x, y < 1$  och noll annars och  $(\xi, \eta)$  har likformig fördelning på kvadraten  $K = \{0 < x, y < 1\}$ . Att  $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$  betyder att  $(\xi, \eta)$  ligger i cirkelskivan med centrum i origo och radie 1. Arean av den skivan är  $\pi$  och arean av den del av skivan som ligger i  $K$  är lika med  $\pi/4$ . Så  $P(\xi^2 + \eta^2 \leq 1) = (\pi/4)/\text{arean av } K = \pi/4 = 0.785398$ .

12. Vi räknar ut  $P(\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3) > 1)$  som  $1 - P(\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3) < 1)$ . Vi har

$$P(\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3) < 1) = P(\xi_1 < 1, \xi_2 < 1, \xi_3 < 1)$$

och eftersom variablerna är oberoende får vi

$$\begin{aligned} P(\xi_1 < 1, \xi_2 < 1, \xi_3 < 1) &= P(\xi_1 < 1)P(\xi_2 < 1)P(\xi_3 < 1) \\ &= 0.5 \cdot \Phi(1) \cdot (1 - e^{-1}) \\ &= 0.5 \cdot 0.8413 \cdot 0.632 \\ &= 0.2659 \end{aligned}$$

Svar:  $1 - 0.2659 = 0.7341$

## Del 2

**13.** Från exempel 11.4 vet vi att fördelningsfunktionen för  $\xi$  är

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2/2, \quad 0 < x < 1, \\ F(x) &= 1 - (2 - x)^2/2, \quad 1 \leq x < 2. \end{aligned}$$

Vi bestämmer nu fördelningsfunktionen  $F_\zeta(z) = P(\zeta \leq z)$  för  $\zeta$ .

Vi har  $F_\zeta(z) = 0$  om  $x < 0$  och  $F_\zeta(z) = 1$  om  $x > 1$ , så låt  $0 < z < 1$ . Eftersom  $0 < \zeta < 2$  gäller att

$$\{\zeta \leq z\} = \{0 \leq \zeta \leq z \text{ eller } 1 \leq \zeta \leq 1 + z\}.$$

Det betyder att

$$\begin{aligned} P(\zeta \leq z) &= P(0 \leq \xi \leq z) + P(1 \leq \xi \leq 1 + z) \\ &= F(z) + F(1 + z) - F(1) \\ &= z^2/2 + (1 - (2 - (1 + z))^2/2) - 1/2 \\ &= z^2/2 + 1/2 - (1 - z)^2/2 \\ &= z, \end{aligned}$$

och vi ser att  $F_\zeta$  är fördelningsfunktionen för  $R(0, 1)$ -fördelningen.

**14. a)** Eftersom alla linjärkombinationer  $c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2$  är normalfördelade (sats 6.5) blir alla linjärkombinationer  $c_1\xi + c_2\eta$  också normalfördelade och det betyder att  $(\xi, \eta)$  har tvådimensionell normalfördelning.  $E(\xi) = 1, E(\eta) = 0, \sigma(\xi) = \sqrt{5}, \sigma(\eta) = \sqrt{10}$ ,

$$\begin{aligned} Cov(\xi, \eta) &= E((\zeta_1 + 2\zeta_2) \cdot (3\zeta_1 + \zeta_2)) \\ &= E(3\zeta_1^2 + 7\zeta_1 \cdot \zeta_2 + 2\zeta_2^2) \\ &= 5 \end{aligned}$$

eftersom  $E(\zeta_i^2) = 1$  och  $E(\zeta_1 \cdot \zeta_2) = 0$  pga oberoendet. Så  $\rho = 5/(\sqrt{5}\sqrt{10}) = 1/\sqrt{2}$ .

**b)** Ett argument för att  $(\zeta_1, \zeta_3)$  inte har tvådimensionell normalfördelning är att  $\zeta_1 + \zeta_3 = \zeta_1 - \zeta_1$  är konstant lika med noll och alltså inte har en normalfördelning (sats 11.3). (Man kan också konstatera att  $\rho = 1$  vilket gör att frekvensfunktionen för tvådimensionell normalfördelning är odefinierad.) Detta räcker för full poäng. Ett argument för att  $(\zeta_1, \zeta_3)$  inte har någon tvådimensionell kontinuerlig fördelning är att  $(\zeta_1, \zeta_3)$  alltid ligger på unionen av två linjer i  $xy$ -planet. Det medför att fördelningen för  $(\zeta_1, \zeta_3)$  inte kan beskrivas med en tvådimensionell frekvensfunktion.

**15. a)** Låt  $\xi$  = antalet felaktiga komponenter av totalt  $n$ . Då gäller  $\xi \in \text{Bin}(n, p)$ . Satsen om linjära funktioner (sats 5.1) samt att  $E(\xi) = n \cdot p$  ger

$$E(p^*) = E\left(\frac{1}{n}\xi\right) = \frac{1}{n}E(\xi) = \frac{1}{n}np = p.$$

Alltså är  $p^*$  väntevärdesriktig.

**b)** Enligt CGS har vi  $p^* \in N(p, \sqrt{p(1-p)/n})$ .