

Korta lösningar till tentan i s0008m den 3 juni 2025

1. Sannolikheten att få dubbelsexa är $1/36$ och sannolikheten att inte få dubbelsexa $1 - 1/36 = 35/36$. På n kast har vi därför, eftersom kasten antas oberoende, att

$$P(\text{minst en dubbelsexa}) = 1 - P(\text{alla } n \text{ kast ger ej dubbelsexa}) = 1 - (35/36)^n.$$

Vi ska därför lösa ekvationen $1 - (35/36)^n = 0.8$ eller $(35/36)^n = 0.2$. Vi får $n = -\ln 0.2 / \ln (35/36) = 57.131$. Svar: 58.

2. Låt I stå för händelsen att ett inbrott sker, L händelsen att larmet går. Vi söker $P(I^c|L)$. Enligt uppgift gäller $P(L|I) = 0.99$, $P(L|I^c) = 0.02$ och $P(I) = 0.001$. Vi har

$$P(L) = P(L|I)P(I) + P(L|I^c)P(I^c) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999 = 0.02097$$

så

$$P(I|L) = \frac{P(I \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L|I)P(I)}{P(L)} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.02097} = 0.04721$$

$$\implies P(I^c|L) = 1 - P(I|L) = 0.9528.$$

3. Låt ξ stå för antal trasiga trådar av de 200 trådarna. Då gäller att $\xi \in \text{Bin}(200, 0.02)$. Vi söker $P(\xi \leq 5)$. Exakt får vi 0.7867 och med Poissonapproximation ($\text{Po}(\lambda)$ med $\lambda = 4$) får vi 0.7851.

4. Låt ξ_i stå för vinst på tråd i , $i = 1, 2, \dots, 100$. Vi söker $P(\sum_{i=1}^{100} \xi_i > 900)$. Enligt CGS gäller approximativt $\sum_{i=1}^{100} \xi_i \in N(100\mu, 100 \cdot \sigma)$ där $\mu = E(\xi_i)$ och $\sigma = \sqrt{V(\xi_i)}$. Beräkning av väntevärde och standardavvikelse från definitionen ger $\mu = E(\xi_i) = 8$, $\sigma(\xi_i) = 6$ så vi har approximativt $\sum_{i=1}^{100} \xi_i \in N(800, 60)$. Vi får

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} \xi_i > 900\right) \approx 0.0478.$$

5. Låt ξ stå för hastigheten i x -led. Då kan rörelseenergin för en partikel skrivas

$$\eta = m\xi^2/2.$$

Satsen om linjära funktioner ger $E(\eta) = mE(\xi^2)/2$. Eftersom $\xi \in N(0, 3)$ har vi $E(\xi^2) = V(\xi) = 9$. Alltså blir väntevärdet av rörelseenergin $6.52 \cdot 10^{-23} \cdot 9/2$. För en mol partiklar får vi väntevärdet, enligt satsen om linjära funktioner, genom att multiplicera med $6.02214076 \cdot 10^{23}$, vilket ger 176.7.

6. Det första villkoret är (här är $\eta \in N(0, 1)$)

$$0.06 = P(\xi > 1.07) = P\left(\eta > \frac{1.07 - \mu}{\sigma}\right).$$

Vi får

$$\frac{1.07 - \mu}{\sigma} = \lambda_{0.06} \approx 1.56$$

Det andra villkoret är

$$0.02 = P(\xi < 0.92) = P\left(\eta < \frac{0.92 - \mu}{\sigma}\right).$$

Vi får

$$\frac{0.92 - \mu}{\sigma} = -\lambda_{0.02} \approx -2.05.$$

Om vi löser ekvationssystemet med de två obekanta (μ, σ) får vi $\sigma = 0.042$.

7. Villkoret att medianen är 1 ger ekvationen $1 - e^{-\lambda} = 0.5 \implies \lambda = \ln 2$. Att $\xi + 3 \leq 5$ är samma sak som att $\xi + \leq 2$. Vi använder fördelningsfunktionen för ξ och får $P(\xi \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-2 \ln 2} = 1 - 0.5^2 = 0.75$.

8. Eftersom vi inte har normalfördelning används teckenintervall. Konfidensgraden för $[\xi(2), \xi(8)]$ är nära 96 % (96.09 % närmare bestämt). Det ordnade stickprovet är $x(1) = 0.53, x(2) = 4.5, x(3) = 5.24, x(4) = 8.54, x(5) = 11.85, x(6) = 13.66, x(7) = 13.96, x(8) = 15.04, x(9) = 16.85$. Så intervallet blir $[4.5, 15.04]$.

9. Eftersom han väger olika klot måste vi göra parvisa jämförelser, dvs vi måste använda metoden med stickprov i par. Nedre gräns för konfidensintervallet (formel (8.8) på sid 240) blir 0.169.

10. Lämplig beslutsregel: förkasta H_0 om $\bar{\xi} < k$. Villkoret för 1 % signifikansnivå ger (här är $\eta \in N(0, 1)$)

$$P(\bar{\xi} < k | \mu = 0.5) = P\left(\eta < \frac{k - 0.5}{0.3/\sqrt{5}}\right) = 0.01.$$

Vi får

$$\frac{k - 0.5}{0.3/\sqrt{5}} = -\lambda_{0.01} \implies k = 0.5 - 2.3216 \cdot 0.3/\sqrt{5} = 0.1885247.$$

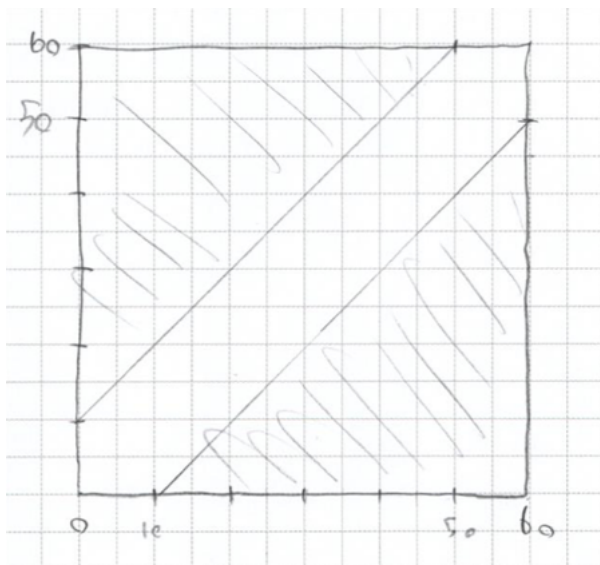
Styrkan blir

$$P(\bar{\xi} < 0.1885247 | \mu = 0) = P\left(\eta < \frac{0.1885247}{0.3/\sqrt{5}}\right) = 0.92.$$

11. Låt ξ, η stå för Joels respektive Majas betyg. Den betingade fördelningen för η , givet att $\xi = 4$, är det "normerade tvärsnitt" som vi får genom att ta talen i den andra raden i tabellen delade med deras summa, $0.02/0.44, 0.29/0.44, 0.13/0.44$. Väntevärdet i denna (betingade) fördelning blir $3 \cdot 0.02/0.44 + 4 \cdot 0.29/0.44 + 5 \cdot 0.13/0.44 = 4.25$.

12. Låt ξ, η stå för personernas ankomsttider. Dessa kan antas vara oberoende och $R(0, 60)$ -fördelade, vilket betyder att (ξ, η) har likformig fördelning på kvadraten $K = [0, 60] \times [0, 60]$. Att personernas ankomsttider skiljer sig med högst 10 minuter motsvaras av att (ξ, η) hamnar i ett visst delområde B av K . Se det oskuggade området i figuren på nästa sida. Detta område har area $60^2 - 2 \cdot 50^2/2$. Så

$$P(\text{dom träffas}) = P((\xi, \eta) \in B) = \frac{60^2 - 2 \cdot 50^2/2}{\text{arean av } K} = \frac{60^2 - 2 \cdot 50^2/2}{60^2} = 0.3056.$$



Del 2

13. Låt $\xi_A = 1$ om A inträffar, $\xi_A = 0$ annars. Om ξ_B, ξ_C, ξ_D definieras på motsvarande sätt kan vi skriva

$$\xi = \xi_A + \xi_B + \xi_C + \xi_D.$$

Vi har $E(\xi_A) = 0 \cdot P(A^c) + 1 \cdot P(A) = P(A) = 0.3$. På liknande sätt får vi $E(\xi_B) = 0.5, E(\xi_C) = 0.8, E(\xi_D) = 0.7$. Sats 5.1 ger nu

$$E(\xi) = E(\xi_A) + E(\xi_B) + E(\xi_C) + E(\xi_D) = 2.3.$$

Kommentar: Man kan också först bestämma sannolikhetsfunktionen för ξ genom att utnyttja oberoende, men det leder till betydligt längre uträkningar.

15. Låt (ξ, η) beteckna x - och y -koordinat för en olyckas slumpmässiga position. Eftersom gatusystemet är beskaffat så att man endast kan färdas i en riktning som är parallell med koordinataxlarna blir den sträcka som ambulansen behöver färdas vid utryckning lika med $|\xi| + |\eta|$. Satsen om linjära funktioner ger att

$$E(|\xi| + |\eta|) = E(|\xi|) + E(|\eta|).$$

Marginalfördelningen för ξ ges av (se exempel 11.3 i boken)

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Fördelningen är symmetrisk kring 0 vilket ger oss att

$$\begin{aligned} E(|\xi|) &= \int_{-1}^1 |x| f_\xi(x) dx = 2 \int_0^1 x \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2} = \frac{4}{\pi} \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\frac{1}{3} (1 - x^2)^{3/2} \right]_0^1 = 4/3\pi. \end{aligned}$$

Symmetri ger $E(|\xi|) = E(|\eta|)$. Så $E(|\xi| + |\eta|) = 8/3\pi$.