

Korta lösningar till tentan i s0008m den 17 december 2024

1. $P(\text{exakt ett fel}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0.23.$
2. Låt S stå för att personen är sjuk (dvs bär på viruset) och F att personen är frisk (dvs $F = S^c$), D_S för sjukdiagnos och D_F för friskdiagnos. Enligt uppgift har vi $P(S) = 0.05$, $P(D_F|F) = 0.81$, $P(D_S|S) = 0.95$ och vi söker $P(F|D_S)$. Vi får
$$P(F|D_S) = \frac{P(F \cap D_S)}{P(D_S)} = \frac{P(F)P(D_S|F)}{P(D_S|D)P(S) + P(D_S|F)P(F)} = 0.7917.$$
3. $P(\text{exakt 3 defekta}) = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{1}}{\binom{11}{4}} = 0.1818.$
4. GGS ger att ξ approximativt är $N(60 \cdot 3, \sqrt{60} \cdot \sqrt{3}) = N(180, \sqrt{180})$. Det ger approximationen $P(\xi \leq 203) \approx \Phi(1.714) = 0.9564$
5. Enligt Sats 5.3 blir standardavvikelsen för det genomsnittliga felet lika med $\sigma/\sqrt{16} = 1.7/4 = 0.425$.
OBS: Eftersom ingenting antas om normalfördelning måste vi använda sats 5.3 och inte sats 6.5. (Man får dock rätt svar om man använder sats 6.5.)
6. Enligt uppgift gäller $P(\xi \leq 3.9) = 0.75$, dvs $1 - e^{-3.9\lambda} = 0.75 \implies \lambda = -\ln(0.25)/3.9$ och $E(\xi) = 1/\lambda = 2.81$.
7. Att partikeln är på talet 16 betyder att 18 av de 20 hoppen är i positiv riktning. Sannolikheten för detta är $\binom{20}{18}0.5^{20} = 0.000181$
8. Om man använder beslutsregeln: förkasta H_0 om $\bar{\xi} > k$ blir $k = 1.079$. Om man använder beslutsregeln: förkasta H_0 om $\bar{\xi} - 0.85 > k$ blir $k = 1.079 - 0.85 = 0.229$.
9. Eftersom bilarna körs av olika förare måste vi använda metoden med stickprov i par. Vi bildar differenserna $z_i = \text{efter-före}$. Vi får $\bar{z} = 0.5083$, $s_z = 0.0970395$ och (med formel (8.8) i boken) ett intervall vars nedre gräns är 0.4064.
10. Låt ξ stå för antal personer med längre reaktionstid efter. $\xi \in \text{Bin}(10, p)$, där $p = 0.5$ om H_0 är sann. Vi har observerat värdet $x = 1$. Eftersom vi har tvåsidig mothypotes blir P-värdet $\alpha_0 = P(\xi \leq 1 \text{ eller } \xi \geq 9 | p = 0.5) = 0.0215$.
11. Låt (ξ, η) beskriva olycksplatsen. Enligt uppgift har (ξ, η) likformig fördelning på K . Att ambulansen behöver färdas en sträcka som är högst 0.7 betyder att $(\xi, \eta) \in A$, där $A = \{(x, y) : x + y \leq 0.7\}$. Området A är triangulärt och har arean $0.7^2/2$. (A begränsas av x - och y -axlarna samt linjen $y = 0.7 - x$.) Så $P((\xi, \eta) \in A) = \text{arean av } A = 0.245$.
12. Låt deras utgifter beskrivas med $\xi_M \in N(470, 32)$ och $\xi_J \in N(485, 20)$. Fördelningen för $\xi = \xi_J - \xi_M$ är (sats 11.2-3) $N(15, \sigma)$, där $\sigma = \sqrt{32^2 + 20^2 - 2\rho \cdot 32 \cdot 20} = \sqrt{32^2 + 20^2 - 1.8 \cdot 32 \cdot 20} = 16.4924$. Vi får $P(\xi < 0) = \Phi(-15/16.4824) = 0.1815$.

Kommentar: Uppgift 12 gav 2 poäng men visades som 3 poäng på tentan. Man har kunnat få 3p på uppgift 12 och istället 2p på uppgift 11.

Del 2

13. Låt deras utgifter beskrivas med $\xi_M \in N(470, 32)$ och $\xi_J \in N(485, 20)$ enl ovan. Fördelningen för $\xi = \xi_M - \xi_J \in N(-15, \sigma)$, där $\sigma = \sqrt{32^2 + 20^2 - 2\rho \cdot 32 \cdot 20}$. Vi vet att sannolikheten att Majas utgifter under en månad överstiger Joels är 0.15:

$$P\left(\frac{\xi - (-15)}{\sigma} > \frac{0 - (-15)}{\sigma}\right) = 0.15 \implies \frac{15}{\sigma} = \lambda_{0.15} = 1.036433,$$

dvs $\frac{15}{\lambda_{0.15}} = \sigma = \sqrt{32^2 + 20^2 - 2\rho \cdot 32 \cdot 20}$ eller $(\frac{15}{\lambda_{0.15}})^2 = 32^2 + 20^2 - 2\rho \cdot 32 \cdot 20$,
 $\rho = (32^2 + 20^2 - (\frac{15}{\lambda_{0.15}})^2) / (2 \cdot 32 \cdot 20) = 0.9488598$.

14 För den 25e percentilen, L_{25} , gäller

$$P(\zeta \leq L_{25}) = 0.25.$$

Vi har $P(\zeta \leq z) = P(\xi_1 \leq z)^2 = \Phi(z)^2$. Vi vill alltså lösa ekvationen $\Phi(z)^2 = 0.25$, eller $\Phi(z) = 0.5$. Lösningen är $z = 0$.

15. Satsen om linjära funktioner (sats 5.1) ger att

$$f(c) = E(\xi^2 - 2c\xi + c^2) = E(\xi^2) - 2cE(\xi) + c^2 = E(\xi^2) - 8c + c^2.$$

(Här är $E(\xi^2)$ en konstant vars värde inte påverkar optimeringsproblemet.) Eftersom $f'(4) = 0$ och $f''(4) > 0$ antar f sitt minsta värde då $c = 4$.