

Korta lösningar till tentan i s0008m den 25 augusti 2026

Uppgift 1. Låt N vara händelsen att personen har Netflix och låt V vara händelsen att personen bor i villa. Vi söker

$$P(N^c \mid V).$$

Komplementregeln och definitionen av betingad sannolikhet ger

$$\begin{aligned} P(N^c \mid V) &= 1 - P(N \mid V) \\ &= 1 - \frac{P(N \cap V)}{P(V)} \\ &= 1 - \frac{0.11}{0.24} \\ &= 0.541666 \dots \end{aligned}$$

Alltså är sannolikheten

$$\boxed{54.17\%}.$$

Uppgift 2. Låt ξ vara antalet gånger Tuva behöver skriva tentan innan hon klarar den. Sannolikheten att hon misslyckas vid ett försök är

$$1 - 0.4 = 0.6.$$

För att hon ska behöva skriva tentan minst fyra gånger måste hon misslyckas på de tre första försöken. Eftersom försöken är oberoende får vi

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 4) &= 0.6^3 \\ &= 0.216. \end{aligned}$$

Sannolikheten är således

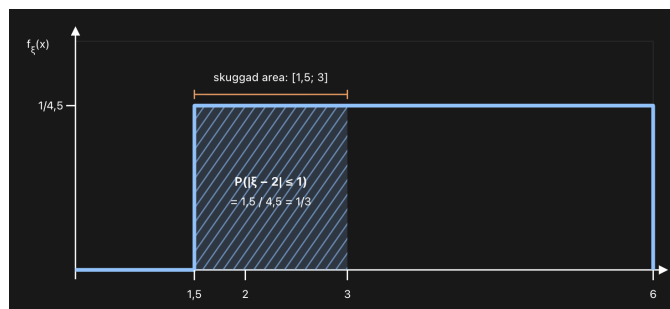
$$\boxed{21.6\%}.$$

Uppgift 3. Slumpvariabeln ξ är rektangelfördelad på intervallet $[1.5, 6]$, vilket vi skriver som

$$\xi \in R(1.5, 6).$$

Täthetsfunktionen är

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6 - 1.5} = \frac{1}{4.5}, & 1.5 \leq x \leq 6, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$



Vi har

$$|\xi - 2| \leq 1 \iff 1 \leq \xi \leq 3.$$

Eftersom ξ endast kan anta värden i intervallet $[1.5, 6]$ blir det relevanta intervallet $[1.5, 3]$. Därför

$$\begin{aligned} P(|\xi - 2| \leq 1) &= P(1.5 \leq \xi \leq 3) \\ &= \frac{3 - 1.5}{6 - 1.5} \\ &= \frac{1.5}{4.5} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Sannolikheten är alltså

$$\boxed{33.33\%}.$$

Den motsvarar den skuggade arean i figuren.

Uppgift 4. Låt ξ vara antalet ytdefekter på en komponent. Då gäller

$$\xi \in \text{Po}(\lambda).$$

För en Poissonfördelad slumpvariabel gäller

$$V(\xi) = \lambda$$

och därmed

$$\sigma_\xi = \sqrt{\lambda}.$$

Eftersom standardavvikelsen är 2.2 får vi

$$\sqrt{\lambda} = 2.2,$$

vilket ger

$$\lambda = 2.2^2 = 4.84.$$

Den sökta sannolikheten är

$$\begin{aligned} P(2 \leq \xi \leq 5) &= \sum_{k=2}^5 P(\xi = k) \\ &= \sum_{k=2}^5 e^{-4.84} \frac{4.84^k}{k!} \\ &\approx 0.597834. \end{aligned}$$

Sannolikheten är således

$$\boxed{59.8\%}.$$

Uppgift 5. Antag att

$$\xi \in N(\mu, \sigma),$$

där σ betecknar standardavvikelsen.

Av

$$P(\xi > 1.05) = 0.07$$

följer

$$P(\xi \leq 1.05) = 0.93.$$

Standardisering ger därför

$$P\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma} \leq \frac{1.05 - \mu}{\sigma}\right) = 0.93.$$

Alltså

$$\frac{1.05 - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.93) \approx 1.47579.$$

På motsvarande sätt ger

$$P(\xi < 0.94) = 0.02$$

att

$$\frac{0.94 - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.02) \approx -2.05375.$$

Det räcker att approximera mha tabellen på sidan 395 (310 i gamla boken).

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1.05 - \mu = 1.47579\sigma, \\ 0.94 - \mu = -2.05375\sigma. \end{cases}$$

Genom att subtrahera den andra ekvationen från den första får vi

$$0.11 = (1.47579 + 2.05375)\sigma.$$

Därmed

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{0.11}{1.47579 + 2.05375} \\ &\approx 0.031166. \end{aligned}$$

Insättning i exempelvis den andra ekvationen ger

$$\begin{aligned} \mu &= 0.94 + 2.05375\sigma \\ &\approx 1.004006. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\mu \approx 1.004, \quad \sigma \approx 0.031.$$

Det efterfrågade värdet är

$$\boxed{\sigma = 0.031 - 0.032}.$$

6. Låt $\bar{\xi}$ stå för genomsnitt i stickprovet. Den kan skrivas $\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{65} \xi_i / 65$ där ξ_i är volym (i ml) i dos i . CGS ger att $\bar{\xi}$ är approximativt $N(50, 3.2/\sqrt{65})$ -fördelad. Det ger

$$P(\bar{\xi} > 52) \approx 0.$$

Svar: **0.0**

7. Låt ξ vara antal kunder på en dag och η vinsten på en dag. Då gäller

$$\eta = 30 \cdot \xi - 200.$$

Det gäller att $\xi \in Po(30)$ så $V(\xi) = 30$. Satsen om linjära funktioner ger att

$$V(\eta) = 30^2 V(\xi)$$

och standardavvikelsen blir alltså $\sigma_\eta = 30\sqrt{30} = 164.3168$.

Svar: **164.3**

8. Vi har ett stickprov från $N(\mu, \sigma)$ och vill testa $H_0: \mu = 7$ mot $H_1: \mu = 9$. Eftersom σ är okänd använder vi testvariabeln

$$t = \frac{\bar{x} - 7}{s/\sqrt{10}}$$

där H_0 avfärdas då $t > t_\alpha(9)$. Vi har $\bar{x} = 7.2, s = 8.804039, t = 0.0718$. Så vi kan inte ens påstå att förvaltaren har bättre avkastning än index med 20 % felrisk.

Svar: **Alternativ 6**

9. Eftersom Elsa och Araz löser samma uppgifter ska ett parat konfidensintervall användas. Enligt definitionen i uppgiften sätter vi

$$D_i = \text{Araz tid} - \text{Elsas tid}.$$

Differenserna är

$$8, 9, \quad 24, 1, \quad 5, 1, \quad -27, 2, \quad -29, 6, \quad 19, 0.$$

Dessa ger

$$\bar{d} = 0.05, \quad s_d \approx 23.0782.$$

För ett tvåsidigt 98-procentigt konfidensintervall används

$$t_{0.01}(5) \approx 3,36493.$$

Konfidensintervallet blir

$$\begin{aligned} \bar{d} \pm t_{0.01}(5) \frac{s_d}{\sqrt{6}} &= 0,05 \pm 3.36493 \frac{23.0782}{\sqrt{6}} \\ &= [-31.6531, 31.7531]. \end{aligned}$$

Svar (övre gräns): **31.75**

10. Låt m vara fördelningssmedianen och sätt

$$\eta = \#\{i : \xi_i < m\}.$$

Eftersom fördelningen är kontinuerlig gäller

$$P(\xi_i < m) = 0,5$$

och därmed

$$\eta \in \text{Bin}(11, 0,5).$$

Intervallet

$$[\xi_{(2)}, \xi_{(10)}]$$

innehåller medianen när

$$2 \leq \eta \leq 9.$$

Konfidensgraden är därför

$$P(2 \leq \eta \leq 9) = 0.98828125.$$

Svar: **98.82**

11. Om vi tittar närmare på den simultana frekvensfunktionen ser vi att vi har tvådimensionell normalfördelning där variablerna är $N(0,1)$ -fördelade och oberoende. Sats 6.2 ger

$$\begin{aligned} P(\xi_1 + \xi_2 > 1) &= P\left(\eta > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0,7071) \\ &\approx 0.239750. \end{aligned}$$

Svar: **23.97**

12. Låt

$$\xi \in R(0, 10), \quad \eta \in R(0, 30),$$

där ξ och η är oberoende. Vi söker

$$P(\xi + \eta \leq 15).$$

Den gemensamma tätheten är konstant på rektangeln

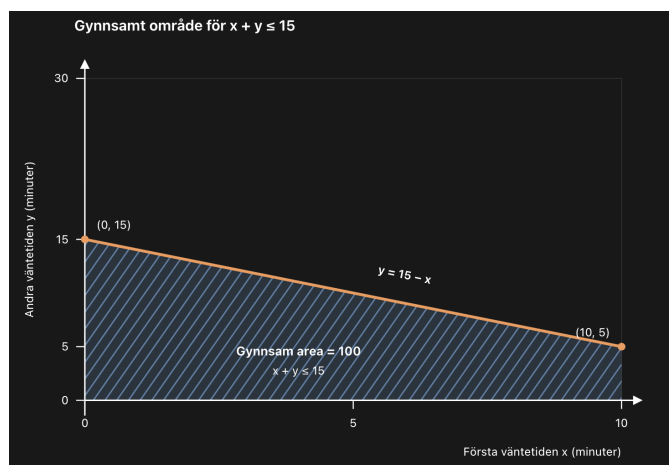
$$0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 30.$$

Så vi har likformig fördelning på denna rektangel. Den gynnsamma arean är (se figur) 100. Hela rektangelns area är

$$10 \cdot 30 = 300.$$

Alltså

$$P(\xi + \eta \leq 15) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}.$$



Del 2.

13. Nettovinsten är

$$\eta = 30\xi - 200, \quad \xi \in \text{Po}(30).$$

Vi söker

$$P(\eta > 850).$$

Villkoret kan skrivas

$$\eta > 850 \iff 30\xi - 200 > 850 \iff \xi > 35.$$

Eftersom ξ är heltalsvärd innebär detta $\xi \geq 36$. Därför

$$\begin{aligned} P(\eta > 850) &= P(\xi \geq 36) \\ &= 1 - P(\xi \leq 35) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{35} e^{-30} \frac{30^k}{k!}. \end{aligned}$$

Eftersom $\xi \in \text{Po}(\lambda)$ med $\lambda > 15$ kan vi använda att vi approximativt har $\xi \in N(30, \sqrt{30})$ enligt CGS. Vi kan också beräkna enligt

$$\begin{aligned} P(\eta > 850) &= P(\xi \geq 36) \\ &= 1 - P(\xi \leq 35) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{35} e^{-30} \frac{30^k}{k!} \\ &\approx 0,1573835. \end{aligned}$$

14. Definiera indikatorvariablerna

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{om } A_i \text{ inträffar,} \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Antalet inträffade händelser är

$$\xi = I_1 + I_2 + I_3.$$

Med väntevärdets linearitet får vi

$$E(\xi) = E(I_1) + E(I_2) + E(I_3).$$

Eftersom

$$E(I_i) = P(A_i) = 0,5$$

blir

$$E(\xi) = 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5.$$

Det krävs inte att händelserna är oberoende för att använda väntevärdets linearitet.

Alternativt kan de fyra lika sannolika utfallen studeras:

Utfall	ξ
kung-kung	2
kung-10	2
10-kung	2
10-10	0

Alltså har vi $P(\xi = 2) = 0.75$, $P(\xi = 0) = 0.25$ vilket ger

$$E(\xi) = 0 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.75 = 1.5.$$

15. ChatGPT5.6: Nej, den positiva korrelationen visar inte i sig att företag blir mer framgångsrika av att anställa fler utlandsfödda. Korrelation innebär inte automatiskt kausalitet.

Det kan finnas bakomliggande variabler som påverkar både andelen utlandsfödda och vinsten. Exempelvis kan stora, internationella eller storstadsbaserade företag både ha högre vinster och rekrytera fler utlandsfödda. Företagen kan också skilja sig beträffande bransch, storlek, utbildningsnivå, kapitalintensitet och exportverksamhet.

Orsakssambandet kan dessutom gå i motsatt riktning: framgångsrika företag kan ha större möjligheter att rekrytera internationellt. Sambandet gäller också data på företagsnivå och visar inte direkt hur en viss nyanställning påverkar vinsten i ett enskilt företag.

För att uttala sig om en kausal effekt behövs en undersökning som kan utesluta sådana alternativa förklaringar, exempelvis ett väl utformat experiment eller en trovärdig kvasi-experimentell studie. En regressionsanalys där relevanta störfaktorer kontrolleras kan hjälpa, men ger inte automatiskt ett säkert kausalt svar.