

Korta lösningar till tentan i s0008m den 3 juni 2026

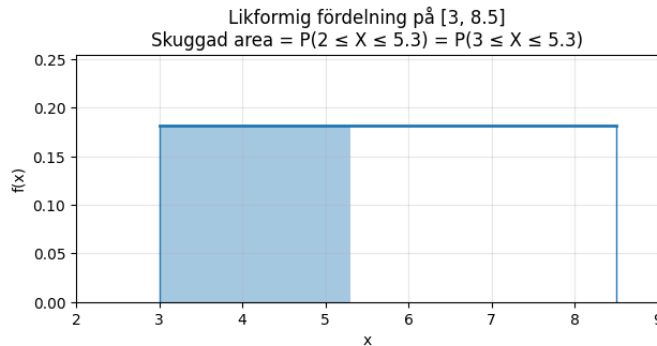
1. Låt S vara händelsen att en slumpmässigt vald person har smartphone och låt V vara händelsen att personen bor i villa. Vi får veta att $P(S) = 0.76$, $P(V) = 0.24$ och $P(S \cap V) = 0.19$. Vi söker $P(S | V) = P(S \cap V)/P(V) = 0.19/0.24 = 0.79166$.
Svar: **79.17%**

2. Låt $\xi_i \in \text{Exp}(1/200)$ vara livslängd för lysrör i där $i = 1, 2, \dots, 10$. Det gäller att $P(\xi_i \geq 250) = e^{-250/200} = 0.2865$. Låt η =antal rör av de 10 som har en livslängd på minst 250. Det är rimligt att anta att livslängderna är oberoende så $\eta \in \text{Bin}(10, 0.2865)$. Vi får nu $P(\eta = 2) = \binom{10}{2} 0.2865^2 (1 - 0.2865)^{10-2} = 0.2481$.
Svar: **24.81**

3. Frekvensfunktionen är $f(x) = \frac{1}{5.5}$ om $3 \leq x \leq 8.5$, $f(x) = 0$ annars. Eftersom $P(\xi < 3.5) = 0$ får vi $P(2 \leq \xi \leq 5.3) = P(3 \leq \xi \leq 5.3) = \text{arean under frekvensfunktionen från } x = 3 \text{ till } x = 5.3 \text{ dvs } \frac{2.3}{5.5} = 0.41818$.

Svar: **41.82**

Kommentar: Man uppmanades skissa $f(x)$ för att se att det efterfrågade intervallet inte var ett delintervall av $[3, 8.5]$.



4. Låt η =antal fel på en svets. Då gäller att $\xi \in \text{Po}(6.2)$. Vi söker $P(\xi \leq 3)$ och får

$$P(\xi \leq 3) = \sum_{x=0}^3 \frac{6.2^x e^{-6.2}}{x!} = 0.1342$$

Svar: **13.42** .

5. Om x är vikt för det lättaste av de 2% tyngsta arken gäller $P(\xi > x) = 0.02$ alternativt $P(\xi \leq x) = 0.98$ där $\xi \in N(4.2, 0.02)$. Så $x = 4.2 + 0.02\lambda_{0.02}$. Normalfördelningstabellen ger $\Phi(2.05) = 0.9798$ så $\lambda_{0.02} \approx 2.05$. Det ger $x \approx 4.2 + 0.02 \cdot 2.05 = 4.24$.

Svar: **4.24**

6. Låt $\bar{\xi}$ stå för genomsnittlig halt i stickprovet. Den kan skrivas $\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{40} \xi_i / 40$ där ξ_i är halten i prov nr i . CGS ger att $\bar{\xi}$ är approximativt $N(0.18, 0.07/\sqrt{40})$ -fördelad. Det ger

$$P(\bar{\xi} \leq 0.17) \approx 0.184$$

Svar: **18.4**

7. Vi beräknar $E(\xi_i)$ och $V(\xi_i)$ från definitionen av väntevärde och varians och får

$$E(\xi_i) = \sum_{x=0}^2 x \cdot P(\xi_i = x) = 1$$

$$V(\xi_i) = \sum_{x=0}^2 (x-1)^2 \cdot P(\xi_i = x) = 0.4.$$

Satsen om linjära funktioner ger nu

$$V(2\xi_1 + 5\xi_2) = 2^2 \cdot 0.4 + 5^2 \cdot 0.4 = 29 \cdot 0.4$$

så $\sigma = \sqrt{29 \cdot 0.4} = 3.405877$

Svar: **3.4**

8. Då H_0 är sann har t en $t(9)$ -fördelning. Eftersom vi har ett ensidigt test blir $k = 2.821$.

Svar: **2.821**

9. Här används metoden för "Stickprov i par". För differenserna $z_1, \dots, z_{10}$ gäller $\bar{z} = 0.3, s_z = 3.267687$.

Intervallat blir

$$0.3 + 1.833 \cdot 3.267687 \implies [-1.5941, 2.1941]$$

Eftersom intervallet innehåller 0 tyder det inte på genomsnittlig skillnad från index.

Svar (övre gräns): **2.19**

10. Intervallet fås enl $\bar{x} \pm \lambda_{0.025} \cdot 0.5/\sqrt{n}$. Dess bredd är

$$2\lambda_{0.025} \cdot 0.5/\sqrt{n} = 2 \cdot 1.96 \cdot 0.5/\sqrt{n}.$$

Om vi sätter detta lika med bredden för intervallet $[7.804, 8.196]$ och löser ekvationen får vi $n \approx 25$.

Svar: **25**

11. Låt ξ_1, ξ_2 stå för Majas respektive Joels betyg. Vi söker

$$P(\xi_1 > \xi_2) = P(\xi_1 - \xi_2 > 0).$$

Enligt en sats i boken gäller att $V(\xi_1 - \xi_2) = 28^2 + 26^2 - 2 \cdot 0.45 \cdot 28 \cdot 25 = 804.8$.

Så $\xi_1 - \xi_2 \in N(40, 28.37)$. Det ger $P((\xi_1 - \xi_2) > 0) = 0.92072$

Svar: **92.07**

12. Det måste gälla att $\sum_{x_1, x_2} p(x_1, x_2) = 1$, dvs

$$\sum_{x_1=0}^1 \sum_{x_2=3}^5 \frac{C}{1+x_1+x_2} = 1 \implies C = 0.8879$$

Marginalfördelningen för ξ_1 blir $P(\xi_1 = 0) = 0.54757$, $P(\xi_1 = 1) = 0.4524$. Den betingade fördelningen blir

$$P(\xi_2 = x \mid \xi_1 = 1) = \frac{C}{2+x_2} / 0.54757.$$

Väntevärdet i denna fördelningen blir

$$\sum_{x_2=3}^5 \frac{0.8879}{0.54757(2+x_2)} = 3.89.$$

Svar: **3.89**

Del 2.

13. Istället för att som i uppgift 8 utgå från förvaltarens avkastning under de tio åren bör man som i uppgift 9 utgå från differenserna avkastning - index. Om dessa betecknas $z_1, \dots, z_{10}$ utgör de ett stickprov från $N(\Delta, \sigma)$. Hypoteserna kan skrivas

$$H_0: \Delta = 0, \quad H_1: \Delta = 2.$$

Lämplig testvariabel är

$$\frac{\bar{z} - 2}{s_z/\sqrt{10}}$$

där H_0 avfärdas då $t > 2.821$. Vi har observerat $t = 0.1935$. Så vi kan inte avfärda H_0 .

Man kan även utgå ifrån ett intervall men då behöver intervallet vara ensidigt.

14. Först kontrollerar vi att A_1 och A_3 är oberoende. Vi har $P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/2$. Det gäller också att $P(A_1) = 1/2$. Vi kan därför dra slutsatsen att A_1 och A_3 är oberoende om vi kan visa att $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4}$.

Händelsen $A_1 \cap A_3$ innebär att första myntet visar kungen och exakt ett av mynten visar kungen. Det är samma sak som att det första myntet visar kungen det andra visar 10, dvs $A_1 \cap A_3 = A_1 \cap A_2^c$ och eftersom A_1, A_2 är oberoende gäller $P(A_1 \cap A_2^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Vi har visat att $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ och kan dra slutsatsen att A_1 och A_3 är oberoende. På ett liknande sätt visas att A_2 och A_3 är oberoende.

Det gäller alltså att de tre händelserna A_1, A_2, A_3 är *parvis oberoende*. De är dock inte oberoende. För om vi t.ex. tittar på snitthändelsen $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ så motsvarar den att första myntet visar kungen, andra visar kungen och att exakt ett mynt visar kungen, så $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1/8$.

Kommentar I uppgiften stod det att man skulle visa att A_1 och A_2 samt A_2 och A_3 är oberoende. Det skulle stått " A_1 och A_3 " där det stod " A_1 och A_2 " (att A_1 och A_2 är oberoende behövde inte visas).

15. Det innebär inte smala diskrimineras. En möjlig förklaring är att vi ser inverkan av variabeln kön: män väger mer och tjänar mer så om man bortser från kön ser det ut som att personer med hög kroppsvikt tjänar mer. En annan relevant variabel skulle kunna vara erfarenhet: både lön och vikt tenderar att öka då vi åldras.