

S0008M-2026-08-25

19 okt. 2026, 14 min läsning

UTKAST

#tenta #sannolikhetslära #statistik

Kurs: S0008M — Sannolikhetslära och statistik **Datum:** 2026-08-25 **Källa:** originaltentamen ·
lärarens lösningar

Översikt

Del 1 (uppgift 1–12, 2–3 poäng var, bara svar):

- betingad sannolikhet (1) och ffg-fördelningen (2)
- rektangel-, Poisson- och normalfördelning (3–5)
- CGS för ett medelvärde (6) och en linjär funktion av en Poissonvariabel (7)
- t -test (8), konfidensintervall för stickprov i par (9) och teckenintervall (10)
- tvådimensionell normalfördelning (11) och summan av två rektangelfördelade väntetider (12)

Del 2 (uppgift 13–15, 10 poäng var, fullständiga lösningar):

- en Poissonsannolikhet (13)
- väntevärde med indikatorvariabler (14)
- korrelation kontra kausalitet (15)

Så använder du sidan

Försök själv först. Fastnar du öppnar du **Ledtråd 1**; den säger vilken sorts uppgift det är. Ledtråd 2 ligger inuti ledtråd 1 och ger modellen, ledtråd 3 ligger inuti ledtråd 2 och ger nyckelsteget.

Lösning är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Betingad sannolikhet: Netflix och villa

En invånare i en kommun väljs ut slumpmässigt. Sannolikheten att personen har Netflix är 0,36, sannolikheten att personen bor i villa är 0,24 och sannolikheten att personen både har Netflix *och* bor i villa är 0,11.

Givet att en person bor i villa, vad är sannolikheten att personen *inte* har Netflix? Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

“Givet att” betyder **betingad sannolikhet**. Vilken händelse betingar vi på?

Ledtråd 2

Kalla händelserna N (Netflix) och V (villa). Du söker $P(N^c \mid V)$.

Ledtråd 3

Komplementregeln gäller också i den betingade världen: $P(N^c \mid V) = 1 - P(N \mid V)$.

Lösning

$$P(N \mid V) = \frac{P(N \cap V)}{P(V)} = \frac{0,11}{0,24} = 0,4583$$

$$P(N^c \mid V) = 1 - 0,4583 = \boxed{54,17 \%}$$

Uppgiftens $P(N) = 0,36$ behövs inte.

Kontrollerat mot facit.

2. Tentaomskrivningar: ffg-fördelningen

Tuva har ingen brådska med att ta examen. Hon har en tenta kvar och tänker skriva den tills hon klarar den, utan att plugga mellan försöken. Eftersom hon inte pluggar mellan försöken är sannolikheten att hon klarar tentan varje gång lika med 0,4 och försöken är oberoende.

Vad är sannolikheten att Tuva behöver skriva tentan **minst 4** gånger? Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Man upprepar ett försök tills det lyckas första gången: **ffg-fördelning**.

Ledtråd 2

ξ = antal skrivningar, $\xi \in \text{ffg}(0,4)$. Vad måste hända för att det ska behövas minst fyra?

Ledtråd 3

“Minst 4” betyder att de **tre första** försöken misslyckas: $P(\xi \geq 4) = P(\xi > 3) = (1 - p)^3$.

Lösning

Försöken är **oberoende**, och varje försök misslyckas med sannolikheten 0,6:

$$P(\xi \geq 4) = 0,6^3 = 0,216 = \boxed{21,6 \%}$$

På räknaren. `1-geomCdf(0.4,1,3)`.

Kontrollerat mot facit.

3. Rektangelfördelning och en absolutbeloppshändelse

Slumpvariabeln ξ har en rektangelfördelning på intervallet $[1,5; 6]$. Skissa först frekvensfunktionen för ξ . Markera sedan sannolikheten $P(|\xi - 2| \leq 1)$ som en skuggad area i din figur. Beräkna till sist denna sannolikhet. Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Rektangelfördelning: sannolikheten för ett intervall är dess längd delad med hela intervallets längd.

Ledtråd 2

Skriv om absolutbeloppet: $|\xi - 2| \leq 1 \iff 1 \leq \xi \leq 3$.

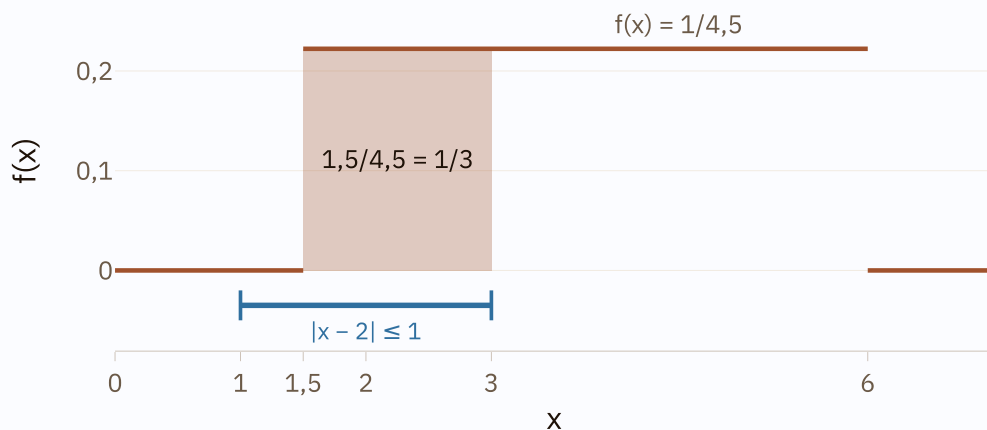
Ledtråd 3

Hela $[1, 3]$ ligger inte inom $[1,5; 6]$. Skär av den del där $f_\xi = 0$.

Lösning

$f_\xi(x) = 1/4,5$ på $[1,5; 6]$ och 0 annars. Eftersom $P(\xi < 1,5) = 0$ är

$$P(|\xi - 2| \leq 1) = P(1 \leq \xi \leq 3) = P(1,5 \leq \xi \leq 3) = \frac{3 - 1,5}{4,5} = \frac{1}{3} = \boxed{33,33 \%}$$



Därför ber uppgiften om en skiss: utan den är det lätt att räkna med hela längden 2 och få $2/4,5$.

Kontrollerat mot facit.

4. Poissonfördelning med given standardavvikelse

Antalet ytdefekter på en lackerad komponent antas vara Poissonfördelat med **standardavvikelse** 2,2. Hur stor är sannolikheten att en komponent har minst två men högst fem defekter? Ange ditt svar i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Poissonfördelning: parametern λ är både väntevärde och varians.

Ledtråd 2

$D(\xi) = \sqrt{\lambda} = 2,2$, alltså $\lambda = 4,84$. Det är **inte** $\lambda = 2,2$.

Ledtråd 3

$P(2 \leq \xi \leq 5) = P(\xi \leq 5) - P(\xi \leq 1)$ för en heltalsvariabel.

 Lösning

$\xi \in \text{Po}(4,84)$ eftersom $\lambda = 2,2^2$.

$$P(2 \leq \xi \leq 5) = \sum_{k=2}^5 e^{-4,84} \frac{4,84^k}{k!} = F(5) - F(1) \approx \boxed{59,8 \%}$$

På räknaren. `poissCdf(4.84, 2, 5)`.

Kontrollerat mot facit.

5. Normalfördelning bestämd ur två andelar

Diametern för axlar som tillverkas kan betraktas som en stokastisk variabel ξ . Vid kvalitetskontroll sorterar man bort de axlar som är tjockare än 1,05 mm eller smalare än 0,94 mm. Man har funnit att $P(\xi > 1,05) = 0,07$ och $P(\xi < 0,94) = 0,02$.

Antag att ξ är $N(\mu, \sigma)$ -fördelad. Bestäm μ och σ och ange värdet på standardavvikelsen σ . Svara med tre decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Två okända, två villkor: varje villkor blir en ekvation efter **standardisering**.

 Ledtråd 2

$P(\xi > 1,05) = 0,07$ ger $\frac{1,05 - \mu}{\sigma} = \lambda_{0,07}$. Gör likadant med det andra villkoret, där gränsen ligger i vänstra svansen.

 Ledtråd 3

Subtrahera ekvationerna så försvinner μ : $1,05 - 0,94 = (\lambda_{0,07} + \lambda_{0,02}) \sigma$.

 Lösning

Standardisera båda villkoren:

$$\frac{1,05 - \mu}{\sigma} = \lambda_{0,07} \approx 1,4758, \quad \frac{0,94 - \mu}{\sigma} = -\lambda_{0,02} \approx -2,0537$$

Subtraktion ger

$$0,11 = (1,4758 + 2,0537) \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{0,11}{3,5295} \approx \boxed{0,031}$$

och insättning ger $\mu = 0,94 + 2,0537 \cdot 0,0312 \approx 1,004$.

På räknaren. `invNorm(0.93)` och `invNorm(0.98)` ger kvantilerna.

Kontrollerat mot facit. Med tabellens avrundade kvantiler godtar läraren även $\sigma = 0,032$.

6. Stickprovsmedelvärde med CGS

En fyllningsmaskin doserar i genomsnitt 50,0 ml med standardavvikelse 3,2 ml. Ett stickprov om 65 förpackningar tas. Hur stor är sannolikheten att stickprovsmedelvärdet är större än 52 ml? Svara i procent med en decimal.

Kommentar: Som vanligt får approximationer användas om sådana skulle kunna motiveras.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Fördelningen för doserna är inte given, men $n = 65$ är stort: **Centrala gränsvärdessatsen**.

 Ledtråd 2

Medelvärdet är approximativt $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

 Ledtråd 3

$\sigma/\sqrt{65} = 0,397$. Hur många sådana medelfel ligger 52 från 50?

 Lösning

$\bar{\xi} \approx N(50; 3,2/\sqrt{65}) = N(50; 0,397)$, så

$$P(\bar{\xi} > 52) \approx 1 - \Phi\left(\frac{52 - 50}{0,397}\right) = 1 - \Phi(5,04) \approx \boxed{0,0 \%}$$

Ett medelvärde fem medelfel från μ inträffar praktiskt taget aldrig.

Kontrollerat mot facit.

7. Nettovinst som linjär funktion av en Poissonvariabel

Thomas jobbar som inkastare på en bar på en grekisk ö, vilket innebär att han försöker få förbipasserade turister att besöka baren. För varje person han lyckas få att gå in i baren får han 30 kr. Samtidigt har Thomas kostnader på 200 kr per dag. Om han till exempel lockar 20 kunder en dag blir hans nettovinst den dagen 400 kr.

Antag att antalet kunder som Thomas lyckas locka till baren på en dag har en Poissonfördelning och att han i genomsnitt lockar 30 kunder per dag. Vad är då **standardavvikelsen** för hans nettovinst på en dag? Svara med en decimal.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Skriv nettovinsten som en **linjär funktion** av antalet kunder.

 Ledtråd 2

$\eta = 30\xi - 200$ med $\xi \in \text{Po}(30)$, så $V(\xi) = 30$.

 Ledtråd 3

Konstanten -200 påverkar inte spridningen, och $D(a\xi + b) = |a| D(\xi)$.

 Lösning

$$D(\eta) = 30 D(\xi) = 30\sqrt{30} \approx \boxed{164,3 \text{ kr}}$$

Kontrollerat mot facit.

8. Kapitalförvaltaren: t -test med flervalssvar

En viss kapitalförvaltare påstår sig generera en avkastning som är 9 % i snitt. I tabellen ges förvaltarens avkastning under de senaste 10 åren:

År	−1	−2	−3	−4	−5	−6
Avkastning (%)	18	4	−11	8	7	6

Man vill testa förvaltarens påstående om 9 % avkastning mot nollhypotesen H_0 att avkastningen i snitt är 7 %, under antagandet att avkastningen är normalfördelad. Vilket av följande alternativ stämmer?

1. H_0 kan förkastas på 1 % signifikansnivå.
2. H_0 kan inte förkastas på 1 %, men på 2 % signifikansnivå.
3. H_0 kan inte förkastas på 2 %, men på 5 % signifikansnivå.
4. H_0 kan inte förkastas på 5 %, men på 10 % signifikansnivå.
5. H_0 kan inte förkastas på 10 %, men på 20 % signifikansnivå.
6. H_0 kan inte förkastas på 20 % signifikansnivå.
7. Det saknas information för att avgöra om påståendena i 1–6 stämmer.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Normalfördelning med okänd σ och ensidig mothypotes: [[Sammansatta hypoteser| t -test]].

Ledtråd 2

$H_0 : \mu = 7$ mot $H_1 : \mu > 7$. Testvariabeln är $t = \frac{\bar{x} - 7}{s/\sqrt{10}}$, som är $t(9)$ -fördelad under H_0 .

Ledtråd 3

Räkna ut t och jämför med $t_{\alpha}(9)$ för $\alpha = 0,20$, den största nivån i alternativen.

Lösning

Modell. ξ_i = avkastningen år i , $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$ oberoende, $i = 1, \dots, 10$, med σ okänd.

Hypoteser. $H_0 : \mu = 7$ mot $H_1 : \mu > 7$ (förvaltaren påstår mer).

Räkning. $\bar{x} = 7,2$ och $s = 8,804$, så

$$t = \frac{7,2 - 7}{8,804/\sqrt{10}} \approx 0,072$$

Redan på 20 %-nivån är den kritiska gränsen $t_{0,20}(9) = 0,883$, och $0,072 < 0,883$.

Slutsats. H_0 kan inte förkastas ens på 20 %: **alternativ 6**. Med **direktmetoden** blir $\alpha_0 \approx 0,47$.

På räknaren. Stat Tests → t Test på listan med $\mu_0 = 7$ och Alternate Hyp $\mu > \mu_0$: $\pm \approx 0,072$, PVal $\approx 0,47$.

Kontrollerat mot facit.

9. Konfidensintervall för stickprov i par

Elsa och Araz har pluggat till en tenta tillsammans. Araz menar att han i genomsnitt löser uppgifter snabbare än Elsa. För att undersöka om så är fallet vill han beräkna ett konfidensintervall för hur mycket snabbare han i genomsnitt löser uppgifter. De observerar hur lång tid (i sekunder) de tar för att

lösa 6 olika uppgifter.

Uppgift	1	2	3	4	5	6
Araz	207,2	551,4	358,9	396,8	283,7	443,7
Elsa	198,3	527,3	353,8	424	313,3	424,7

Beräkna ett 98 % konfidensintervall för den genomsnittliga skillnaden mellan den tid det tar för Elsa att lösa en uppgift och den tid det tar för Araz att lösa en uppgift (definierad som Araz genomsnitt – Elsas genomsnitt) under lämpliga normalfördelningsantaganden. Svara med den **övre** gränsen och använd två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Båda löser **samma** sex uppgifter. Par eller två stickprov?

Ledtråd 2

Stickprov i par: bilda $z_i = \text{Araz} - \text{Elsa}$ per uppgift och behandla differenserna som ett stickprov ur $N(\Delta, \sigma)$.

Ledtråd 3

98 % tvåsidigt med $n = 6$ ger kvantilen $t_{0,01}(5) = 3,365$.

Lösning

Differenserna Araz – Elsa är

8,9 24,1 5,1 – 27,2 – 29,6 19,0

med $\bar{z} = 0,05$ och $s_z = 23,078$. Intervallet blir

$$\bar{z} \pm t_{0,01}(5) \frac{s_z}{\sqrt{6}} = 0,05 \pm 3,365 \cdot \frac{23,078}{\sqrt{6}} = [-31,65; \boxed{31,75}]$$

Intervallet innehåller 0, så datamaterialet visar ingen genomsnittlig skillnad.

På räknaren. Lägg differenserna i en lista och kör Confidence Intervals → t Interval med C Level 0,98.

Kontrollerat mot facit.

10. Konfidensgrad för ett teckenintervall

Antag att du har ett stickprov $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{11}$ från en kontinuerlig fördelning som *inte* är en normalfördelning. Man vill skatta **medianen** i fördelningen med hjälp av metoden med teckenintervall. Beräkna konfidensgraden för intervallet $[\xi_{(2)}, \xi_{(10)}]$. Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Teckenintervall: räkna antalet observationer under medianen.

Ledtråd 2

η = antalet $\xi_i < m$ är $\text{Bin}(11; 0,5)$. Intervallet $[\xi_{(k+1)}, \xi_{(n-k)}]$ har här $k = 1$.

Ledtråd 3

Konfidensgraden är $1 - 2P(\eta \leq 1)$.

Lösning

$$1 - 2P(\eta \leq 1) = 1 - 2 \cdot \frac{1 + 11}{2^{11}} = 1 - \frac{24}{2048} = 0,98828 = \boxed{98,83 \%}$$

På räknaren. `1-2*binomCdf(11,0.5,1)`.

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit anger 98,82 %; det exakta värdet 98,828 % avrundas till 98,83 %.

11. Summa i en tvådimensionell normalfördelning

Den tvådimensionella slumpvariabeln (ξ_1, ξ_2) har tvådimensionell normalfördelning med frekvensfunktionen

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2}, \quad -\infty < x_1, x_2 < \infty$$

Beräkna sannolikheten $P(\xi_1 + \xi_2 > 1)$. Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Känn igen frekvensfunktionen: vilka parametrar har den tvådimensionella normalfördelningen här?

Ledtråd 2

$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1) \varphi(x_2)$, så ξ_1 och ξ_2 är oberoende och $N(0, 1)$.

Ledtråd 3

Summan är $N(0, \sqrt{2})$.

Lösning

Frekvensfunktionen är en produkt av två $N(0, 1)$ -tätheter, så ξ_1, ξ_2 är oberoende $N(0, 1)$ och $\xi_1 + \xi_2 \in N(0, \sqrt{2})$:

$$P(\xi_1 + \xi_2 > 1) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi(0,7071) = 0,23975 \approx \boxed{23,98 \%}$$

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit anger 23,97 %; det exakta värdet 0,239750 ligger precis på avrundningsgränsen.

12. Två bussar: summan av två rektangelfördelade väntetider

Rolf tar två bussar till jobbet varje morgon. För den första bussen är väntetiden $R(0, 10)$ -fördelad. För den andra bussen är väntetiden $R(0, 30)$ -fördelad och oberoende av väntetiden för den första. Vad är sannolikheten att Rolfs **sammanlagda** väntetid en morgon blir **högst 15** minuter? Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 3

Ledtråd 1

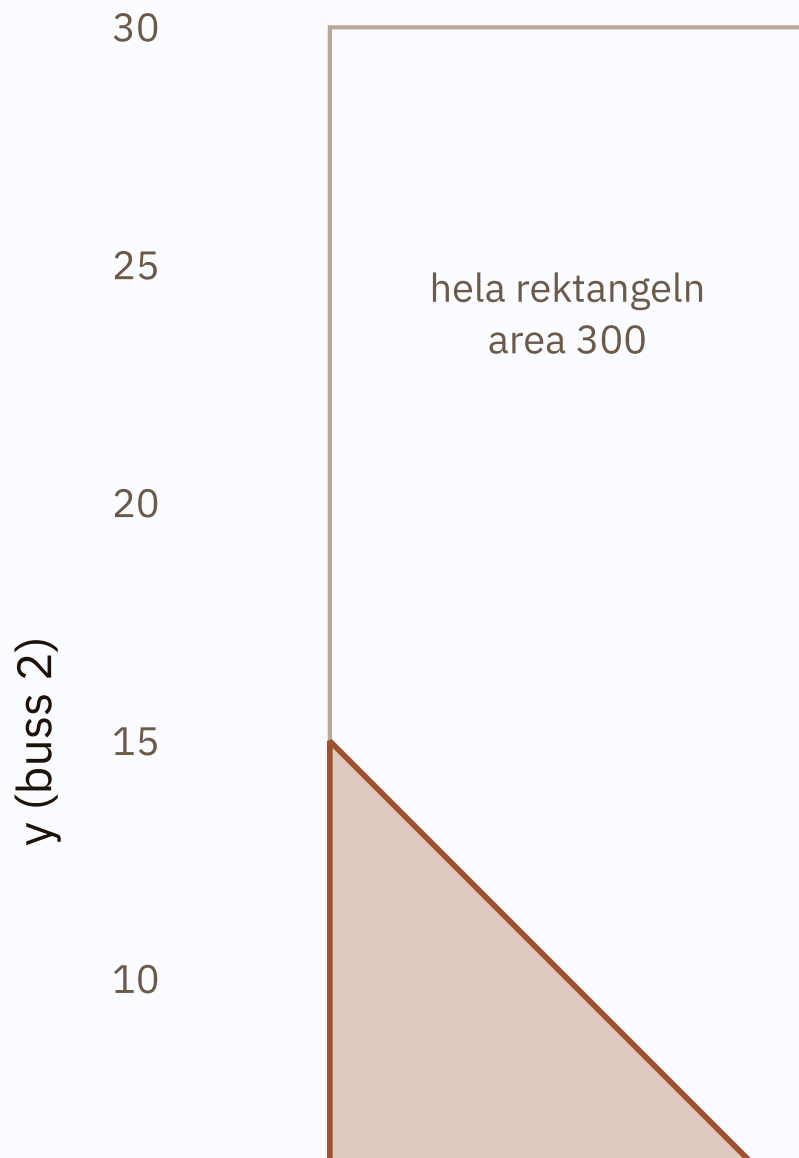
Två oberoende rektangelfördelningar ger en likformig fördelning på en rektangel i planet (Flerdimensionella fördelningar). Sannolikhet blir area.

Ledtråd 2

(ξ, η) är likformig på $[0, 10] \times [0, 30]$ med area 300. Rita linjen $x + y = 15$.

Ledtråd 3

Området under linjen inom rektangeln är en trapets: $\int_0^{10} (15 - x) dx$.

 Lösning

Området $x + y \leq 15$ inom rektangeln har arean

$$\int_0^{10} (15 - x) dx = 150 - 50 = 100$$

så

$$P(\xi + \eta \leq 15) = \frac{100}{300} = \boxed{33,3 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

13. Del 2: nettovinsten överstiger 850 kr

Uppgift 13 fortsätter med situationen från uppgift 7. Vad är sannolikheten att Thomas nettovinst blir större än 850 kr? Skriv en fullständig lösning.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Översätt händelsen om vinsten till en händelse om antalet kunder $\xi \in \text{Po}(30)$.

Ledtråd 2

$30\xi - 200 > 850 \iff \xi > 35$. Eftersom ξ är ett heltal är det $\xi \geq 36$.

Ledtråd 3

Räkna exakt med `poissCdf`, eller `normalapproximera` eftersom $\lambda = 30 > 15$. Glöm inte halvkorrektionen.

 Lösning

Modell. ξ = antal kunder en dag, $\xi \in \text{Po}(30)$. Nettovinsten är $\eta = 30\xi - 200$.

Översätt händelsen.

$$\eta > 850 \iff 30\xi > 1050 \iff \xi > 35 \iff \xi \geq 36$$

Exakt.

$$P(\xi \geq 36) = 1 - \sum_{k=0}^{35} e^{-30} \frac{30^k}{k!} \approx \boxed{0,157}$$

Normalapproximation. Eftersom $\lambda = 30 > 15$ är $\xi \approx N(30, \sqrt{30})$. Med halvkorrektion:

$$P(\xi \geq 36) \approx 1 - \Phi\left(\frac{35,5 - 30}{\sqrt{30}}\right) = 1 - \Phi(1,004) \approx 0,158$$

Utan halvkorrektion, med $(35 - 30)/\sqrt{30}$, blir det 0,181, klart sämre.

Svar. Sannolikheten är ungefär 0,157, alltså knappt 16 %.

På räknaren. `1-poisscdf(30,0,35)`.

Kontrollerat mot facit.

14. Del 2: väntevärde med indikatorvariabler

På ena sidan av ett tiokronorsmynt visas "10" och på den andra kung Carl XVI Gustaf. Tänk dig att du kastar två tiokronorsmynt. Låt A_1 vara händelsen att det första visar kungen, A_2 händelsen att det andra visar kungen, och A_3 händelsen att **exakt ett** av de två mynten visar kungen. Då gäller att A_1 och A_2 är oberoende och $P(A_i) = 0,5, i = 1, 2, 3$.

Låt ξ stå för antalet händelser som inträffar av de tre händelserna A_1, A_2, A_3 . Beräkna **väntevärdet** av ξ .

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Ett antal händelser som inträffar kan skrivas som en summa av indikatorvariabler.

Ledtråd 2

$I_j = 1$ om A_j inträffar, annars 0. Då är $\xi = I_1 + I_2 + I_3$ och $E(I_j) = P(A_j)$.

Ledtråd 3

Väntevärdet av en summa är summan av väntevärdena, **även** om händelserna är beroende.

Lösning

Inför indikatorvariablerna $I_j, j = 1, 2, 3$. Då är $\xi = I_1 + I_2 + I_3$ och

$$E(I_j) = 0 \cdot P(A_j^c) + 1 \cdot P(A_j) = P(A_j) = 0,5$$

Väntevärdet är linjärt utan krav på oberoende, så

$$E(\xi) = 0,5 + 0,5 + 0,5 = \boxed{1,5}$$

Kontroll med utfallen. De fyra lika sannolika utfallen ger

Utfall	A_1	A_2	A_3	ξ
kung–kung	ja	ja	nej	2
kung–10	ja	nej	ja	2
10–kung	nej	ja	ja	2
10–10	nej	nej	nej	0

så $E(\xi) = 2 \cdot 0,75 + 0 \cdot 0,25 = 1,5$.

Kontrollerat mot facit.

15. Del 2: korrelation och kausalitet

Om vi tittar på svenska företag och betraktar variablerna x = andel utlandsfödda anställda och y = vinst per anställd, så kan man finna en tydlig positiv korrelation.

Betyder detta att företag bör anställa utlandsfödda för att bli mer framgångsrika? Förklara. (Endast svar i form av ja/nej ger 0 poäng.)

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Korrelation mäter samvariation, inte orsak.

Ledtråd 2

Finns det en tredje variabel som kan påverka både x och y ?

Ledtråd 3

Tänk på företagets storlek, bransch och ort, och på om sambandet kan gå åt andra hållet.

Lösning

Nej, korrelationen visar inte att det lönar sig att anställa utlandsfödda. En korrelation säger bara att variablerna samvarierar, inte att den ena orsakar den andra.

- **Bakomliggande variabler.** Stora, internationella företag i storstäder kan både ha högre vinst per anställd och rekrytera fler utlandsfödda. Bransch, storlek och exportverksamhet kan förklara båda variablerna.
- **Omvänd riktning.** Framgångsrika företag kan ha större möjlighet att rekrytera internationellt.

För att visa ett orsakssamband behövs en undersökning som utesluter sådana förklaringar, till exempel ett experiment eller en analys som kontrollerar för de bakomliggande variablerna.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [S0008M](#)
 - [Betingad sannolikhet](#)
 - [ffg-fördelning](#)
 - [Likformig fördelning](#)
 - [Poissonfördelning](#)
 - [Standardiserad normalfördelning](#)
 - [Centrala gränsvärdessatsen](#)
 - [Sammansatta hypoteser](#)
 - [Stickprov i par](#)
 - [Teckenintervall](#)
 - [Tvådimensionell normalfördelning](#)
 - [Korrelation](#)
-