

S0008M-2026-06-03

19 okt. 2026, 14 min läsning

UTKAST

#tenta #sannolikhetslära #statistik

Kurs: S0008M — Sannolikhetslära och statistik **Datum:** 2026-06-03 **Källa:** originaltentamen ·
lärarens lösningar

Översikt

Del 1 (uppgift 1–12, bara svar):

- betingad sannolikhet (1) och binomial med exponentialfördelade livslängder (2)
- rektangel-, Poisson- och normalfördelning (3–5)
- CGS för ett medelvärde (6) och variansen av en linjärkombination (7)
- kritisk gräns i ett t -test (8), konfidensintervall för stickprov i par (9) och n ur intervallbredd (10)
- tvådimensionell normalfördelning (11) och betingat väntevärde ur en simultan sannolikhetsfunktion (12)

Del 2 (uppgift 13–15):

- ett bättre test med differenser (13)
- parvis oberoende kontra oberoende (14)
- korrelation och en bakomliggande variabel (15)

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Betingad sannolikhet: smartphone och villa

En invånare i en kommun väljs ut slumpmässigt. Sannolikheten att personen äger en smartphone är 0,76, sannolikheten att personen bor i villa är 0,24 och sannolikheten att personen äger både smartphone och bor i villa är 0,19.

Givet att en person bor i villa, vad är sannolikheten att personen äger en smartphone? Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

“Givet att” betyder **betingad sannolikhet**.

Ledtråd 2

Med S = smartphone och V = villa söks $P(S \mid V)$.

Ledtråd 3

$P(S \mid V) = P(S \cap V)/P(V)$. Uppgiften ger snittet direkt.

Lösning

$$P(S \mid V) = \frac{P(S \cap V)}{P(V)} = \frac{0,19}{0,24} = \boxed{79,17 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Lysrör: exponentialfördelning inuti en binomialfördelning

Livslängden för en viss typ av lysrör (enhet: timmar) är $\text{Exp}(\lambda)$ -fördelad med $\lambda = 1/200$. Ett företag har 10 sådana lysrör i ett lager. Beräkna sannolikheten att **exakt 2** av de 10 rören håller i minst 250 timmar. Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Två steg: först sannolikheten för *ett* rör, sedan antalet rör av tio.

 Ledtråd 2

$p = P(\xi \geq 250)$ för ett **exponentialfördelat** rör. Antalet som håller är $\text{Bin}(10, p)$.

 Ledtråd 3

$$P(\xi \geq 250) = e^{-250/200}.$$

 Lösning

Ett rör håller minst 250 timmar med sannolikheten

$$p = e^{-250/200} = e^{-1,25} = 0,2865$$

Rören antas oberoende, så η = antal av de 10 som håller är $\text{Bin}(10; 0,2865)$:

$$P(\eta = 2) = \binom{10}{2} 0,2865^2 \cdot 0,7135^8 \approx \boxed{24,81 \%}$$

På räknaren. `binomPdf(10, e^(-1.25), 2)`.

Kontrollerat mot facit.

3. Rektangelfördelning: intervall som sticker utanför

Slumpvariabeln ξ har en rektangelfördelning på intervallet $[3; 8,5]$. Skissa först frekvensfunktionen för ξ . Beräkna sedan sannolikheten $P(2 \leq \xi \leq 5,3)$. Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

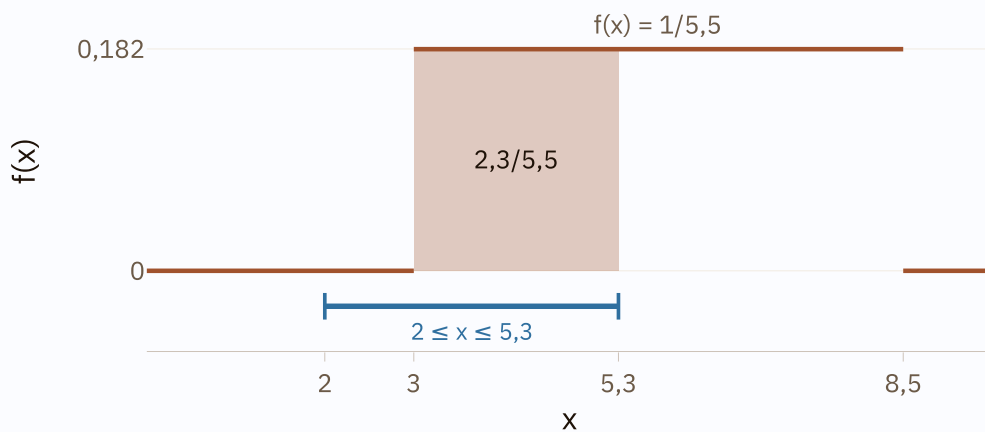
Rektangelfördelning: längden av intervallet delat med hela längden.

Ledtråd 2

Höjden är $1/5,5$. Rita in $[2; 5,3]$ i din skiss.

Ledtråd 3

Under 3 är $f_{\xi} = 0$, så bara $[3; 5,3]$ bidrar.

Lösning

$$P(2 \leq \xi \leq 5,3) = P(3 \leq \xi \leq 5,3) = \frac{5,3 - 3}{5,5} = \frac{2,3}{5,5} = \boxed{41,82 \%}$$

Räknar man med hela längden 3,3 blir svaret för stort. Det är därför uppgiften ber om en skiss.

Kontrollerat mot facit.

4. Poissonfördelade svetsfel

I ett moment av en tillverkningsprocess ska två plåtar svetsas. I svetsarna uppstår dock fel som minskar hållfastheten. Om det visat sig rimligt att beskriva antalet fel per svets med en Poissonfördelning med väntevärde 6,2, hur stor är då sannolikheten att det uppstår **högst 3** fel i en svets? Ange ditt svar i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Poissonfördelning med $\lambda = 6,2$.

Ledtråd 2

“Högst 3” är $P(\xi \leq 3)$, fördelningsfunktionen i 3.

Ledtråd 3

Summera $e^{-6,2} 6,2^k / k!$ för $k = 0, \dots, 3$, eller använd `poissCdf`.

Lösning

$$P(\xi \leq 3) = \sum_{k=0}^3 e^{-6,2} \frac{6,2^k}{k!} \approx \boxed{13,4 \%}$$

På räknaren. `poissCdf(6.2, 0, 3)`.

Kontrollerat mot facit.

5. Normalfördelning: gränsen för de 2 % tyngsta

Kopieringspapper som används vid Luleå tekniska universitets institutioner har en förväntad vikt på 4,2 gram per ark, med standardavvikelsen 0,02 gram per ark. Vikterna antas kunna beskrivas med en normalfördelning. Bestäm vikten för det **lättaste av de 2 % tyngsta** arken. Ange ditt svar med två decimaler.

Totalpoäng: 1

Ledtråd 1

Det söks en kvantil i en **normalfördelning**, inte en sannolikhet.

Ledtråd 2

Gränsen x uppfyller $P(\xi > x) = 0,02$.

Ledtråd 3

Standardisera: $x = \mu + \lambda_{0,02} \sigma$ med $\lambda_{0,02} \approx 2,054$.

Lösning

$$x = 4,2 + \lambda_{0,02} \cdot 0,02 = 4,2 + 2,054 \cdot 0,02 \approx \boxed{4,24 \text{ g}}$$

På räknaren. `invNorm(0.98,4.2,0.02)`.

Kontrollerat mot facit.

6. Medelhalt i 40 prov

I ett bostadsområde vill man se om halten av ett kemiskt ämne är för hög. Förväntad halt under normala förhållanden är 0,18 procent. Om prov tas ut på 40 platser i området, hur stor är sannolikheten att genomsnittet i stickprovet då är **högst** 0,17 procent? Utgå ifrån att standardavvikelsen i ett prov av detta slag är 0,07 procent. Svara i procent med en decimal.

Kommentar: Som vanligt får approximationer användas om sådana skulle kunna motiveras.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Ett medelvärde av 40 oberoende prov: **Centrala gränsvärdessatsen**.

Ledtråd 2

$\bar{\xi} \approx N(0,18; 0,07/\sqrt{40})$ (**Medelvärdets fördelning**).

Ledtråd 3

Standardisera 0,17 med medelfelet 0,0111.

Lösning

$$P(\bar{\xi} \leq 0,17) \approx \Phi\left(\frac{0,17 - 0,18}{0,07/\sqrt{40}}\right) = \Phi(-0,904) \approx \boxed{18,3 \%}$$

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit anger 18,4 %, som man får med tabellvärdet $\Phi(0,90)$.

7. Standardavvikelse för en linjärkombination

Slumpvariablerna ξ_1 och ξ_2 är oberoende och har båda sannolikhetsfunktionen

$$P(\xi_i = 0) = 0,2, \quad P(\xi_i = 1) = 0,6, \quad P(\xi_i = 2) = 0,2, \quad i = 1, 2$$

Låt $\eta = 2\xi_1 + 5\xi_2$. Bestäm **standardavvikelsen** för η . Svara med en decimal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Räkna först $V(\xi_i)$ ur sannolikhetsfunktionen, sedan **variansen för en linjärkombination**.

 Ledtråd 2

$E(\xi_i) = 1$ av symmetri, och $V(\xi_i) = \sum (x - 1)^2 P(\xi_i = x)$.

 Ledtråd 3

Oberoende: $V(2\xi_1 + 5\xi_2) = 4V(\xi_1) + 25V(\xi_2)$.

 Lösning

$E(\xi_i) = 1$ och

$$V(\xi_i) = 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,2 = 0,4$$

$$V(\eta) = 2^2 \cdot 0,4 + 5^2 \cdot 0,4 = 11,6, \quad D(\eta) = \sqrt{11,6} \approx \boxed{3,4}$$

Kontrollerat mot facit.

8. Kritisk gräns i ett t -test

En viss kapitalförvaltare påstår sig generera en avkastning som är 9 % i snitt. I tabellen ges förvaltarens avkastning under de senaste 10 åren:

År	-1	-2	-3	-4	-5	-6
Avkastning (%)	18	4	-11	8	7	6

Man vill testa förvaltarens påstående om 9 % avkastning mot nollhypotesen att avkastningen i snitt är 7 %, under antagandet att avkastningen är normalfördelad. Ett sätt är att utgå från testvariabeln

$$t = \frac{\bar{x} - 7}{s/\sqrt{10}}$$

där $\bar{x} = 7,2$ och $s = 8,8$ är medelvärde och standardavvikelse för avkastningen de 10 senaste åren. Nollhypotesen avfärdas om $t > k$, där k är en konstant. Vilket värde ska k ha för att testet ska få 1 % signifikansnivå? Svara med tre decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Under H_0 är testvariabeln [[t-fördelningen|t-fördelad]].

Ledtråd 2

$n = 10$ ger 9 frihetsgrader. Testet är ensidigt.

Ledtråd 3

$k = t_{0,01}(9)$, kvantilen med 1 % till höger.

Lösning

Om $H_0 : \mu = 7$ är sann är $t \in t(9)$. Med $P(t > k) = 0,01$ blir

$$k = t_{0,01}(9) = \boxed{2,821}$$

På räknaren. `invT(0.99,9)`.

Kontrollerat mot facit.

9. Förvaltare mot index: stickprov i par

Den som sparar för framtiden gör klokt i att välja en global indexfond. Historiskt har den gett en avkastning på 7 % per år. Ett alternativ är att låta en kapitalförvaltare välja aktier. En viss förvaltare (samma som i uppgift 8) påstår sig generera högre avkastning än index. Tabellen jämför förvaltarens avkastning med index under de senaste 10 åren:

År	-1	-2	-3	-4	-5	-6
Indexfond (%)	14	2	-5	11	4	7
Förvaltare (%)	18	4	-11	8	7	6
Förvaltare – index (%)	4	2	-6	-3	3	-1

Skiljer sig förvaltarens avkastning från index i det långa loppet? Beräkna först ett lämpligt 90 % konfidsensintervall för skillnaden i avkastning (förvaltare – index). Antag att avkastningen kan beskrivas med en normalfördelning. Om intervallet indikerar att förvaltarens avkastning skiljer sig från index ska du ange intervallets **nedre** gräns. Om intervallet **inte indikerar** någon skillnad anger du intervallets **övre** gräns.

Totalpoäng: 3

Ledtråd 1

Samma år för båda: **Stickprov i par**.

Ledtråd 2

Använd differensraden som ett stickprov ur $N(\Delta, \sigma)$ och gör ett t -intervall.

Ledtråd 3

Tvåsidigt 90 % med $n = 10$: $t_{0,05}(9) = 1,833$. Innehåller intervallet 0?

Lösning

Differenserna ger $\bar{z} = 0,3$ och $s_z = 3,268$.

$$\bar{z} \pm t_{0,05}(9) \frac{s_z}{\sqrt{10}} = 0,3 \pm 1,833 \cdot 1,033 = [-1,59; 2,19]$$

Intervallet innehåller 0, så det indikerar ingen skillnad. Svaret är den övre gränsen, 2,19.

På räknaren. t Interval på differenslistan med C Level 0,9.

Kontrollerat mot facit.

10. Antal mätningar ur intervallets bredd

En viss mätmetod ger observationer som kan antas vara ett stickprov på en stokastisk variabel som är $N(\mu; 0,5)$ -fördelad, där μ är konstanten man vill mäta. I en rapport presenterades ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden 95 %. Hur många mätningar hade gjorts om intervallet var $[7,804; 8,196]$? Svara med ett heltal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Känd σ : intervallet är $\bar{x} \pm \lambda_{0,025} \sigma / \sqrt{n}$ (Konfidensintervall).

Ledtråd 2

Bredden är $2\lambda_{0,025} \sigma / \sqrt{n}$. Läs av bredden ur intervallet.

Ledtråd 3

$8,196 - 7,804 = 0,392 = 2 \cdot 1,96 \cdot 0,5 / \sqrt{n}$. Lös ut n .

Lösning

$$0,392 = \frac{2 \cdot 1,96 \cdot 0,5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96}{0,392} = 5 \Rightarrow n = \boxed{25}$$

Kontrollerat mot facit.

11. Majas och Joels utgifter: skillnad i tvådimensionell normalfördelning

Majas och Joels utgifter för kursmaterial (enhet: kr) kan betraktas som slumpmässiga. Majas utgifter per månad har väntevärdet 490 kr och standardavvikelsen 28 kr, Joels har väntevärdet 450 kr och standardavvikelsen 26 kr. Utgifterna är beroende med korrelation 0,45 och kan beskrivas med en tvådimensionell normalfördelning.

Vad är sannolikheten att Majas utgifter under en månad **överstiger** Joels? Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Skriv händelsen som $\xi_1 - \xi_2 > 0$. En linjärkombination i en **tvådimensionell normalfördelning** är normalfördelad.

Ledtråd 2

$E(\xi_1 - \xi_2) = 40$. Variansen har en **kovariansterm**.

Ledtråd 3

$$V(\xi_1 - \xi_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Lösning

$$V(\xi_1 - \xi_2) = 28^2 + 26^2 - 2 \cdot 0,45 \cdot 28 \cdot 26 = 804,8, \quad D = 28,37$$

$$P(\xi_1 - \xi_2 > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - 40}{28,37}\right) = \Phi(1,410) \approx \boxed{92,07 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

12. Betingat väntevärde ur en simultan sannolikhetsfunktion

En student ska skriva två tentor. Låt ξ_1 och ξ_2 stå för resultatet på tenta 1 respektive tenta 2. Det gäller att $\xi_1 = 0$ eller 1 (där $\xi_1 = 1$ motsvarar godkänd) och att $\xi_2 = 3, 4$ eller 5. Den simultana sannolikhetsfunktionen är

$$p(x_1, x_2) = \frac{C}{1 + x_1 + x_2}$$

där C är en konstant vars värde du kan börja med att bestämma. Beräkna det betingade väntevärdet $E(\xi_2 \mid \xi_1 = 1)$. Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 3

Ledtråd 1

Betingad fördelning: ta raden $\xi_1 = 1$ och normera den.

Ledtråd 2

C bestäms av att alla sex sannolikheter summerar till 1.

Ledtråd 3

C tar ut sig i den betingade fördelningen: vikterna blir $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ normerade.

Lösning

Konstanten.

$$C \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad C \approx 0,8879$$

Den betingade fördelningen. $P(\xi_1 = 1) = C \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) = 0,4524$, och

$$P(\xi_2 = x \mid \xi_1 = 1) = \frac{C/(2+x)}{0,4524}, \quad x = 3, 4, 5$$

Väntevärdet.

$$E(\xi_2 \mid \xi_1 = 1) = \frac{3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}} = \frac{1,9810}{0,5095} \approx \boxed{3,89}$$

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning skriver nämnaren som 0,54757, vilket är $P(\xi_1 = 0)$, men svaret 3,89 stämmer.

13. Del 2: ett bättre test med differenser

Uppgift 13 fortsätter med situationen från uppgift 8–9. I uppgift 8 bestämde du ett test av påståendet att förvaltaren gör 9 % i avkastning. Testet kan förbättras med informationen i uppgift 9. Beskriv ett sådant bättre test av hypoteserna i uppgift 8, där nollhypotesen är att avkastningen i snitt är 7 % och mothypotesen att den i snitt är 9 %. Kan nollhypotesen avfärdas på 1 % signifikansnivå?

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Varför är differenserna mot index bättre än förvaltarens avkastning ensam? Vad tar de bort?

Ledtråd 2

Stickprov i par: z_i = förvaltare – index är ett stickprov ur $N(\Delta, \sigma)$. Index gör i snitt 7 %, så $H_0 : \Delta = 0$ mot $H_1 : \Delta = 2$.

Ledtråd 3

Testvariabeln $t = \bar{z}/(s_z/\sqrt{10})$ är $t(9)$ under H_0 . Förkasta om $t > t_{0,01}(9) = 2,821$.

 Lösning

Varför bättre. Förvaltarens avkastning svänger kraftigt med börsen. Differensen mot index tar bort den gemensamma variationen, så spridningen blir mycket mindre ($s_z = 3,27$ mot $s = 8,80$). Ett test med mindre spridning har större styrka.

Modell. z_i = förvaltarens avkastning – index år i , $z_i \in N(\Delta, \sigma)$ oberoende, $i = 1, \dots, 10$, med σ okänd.

Hypoteser. $H_0 : \Delta = 0$ (förvaltaren gör som index, 7 %) mot $H_1 : \Delta = 2$ (förvaltaren gör 9 %).

Test. $t = \frac{\bar{z}}{s_z/\sqrt{10}}$ är $t(9)$ -fördelad under H_0 . Förfasta H_0 om $t > t_{0,01}(9) = 2,821$.

Räkning. $\bar{z} = 0,3$ och $s_z = 3,268$, så

$$t = \frac{0,3}{3,268/\sqrt{10}} \approx 0,29 < 2,821$$

Slutsats. H_0 kan **inte** förkastas på 1 %-nivån. Det finns inget stöd för att förvaltaren slår index.

Man kan också använda ett **ensidigt** konfidensintervall för Δ och se om det innehåller 0.

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning anger $t = 0,1935$; med differenserna i tabellen blir $t = 0,29$. Slutsatsen är densamma.

14. Del 2: parvis oberoende men inte oberoende

På ena sidan av ett tiokronorsmynt visas "10" och på den andra kung Carl XVI Gustaf. Tänk dig att du kastar två tiokronorsmynt. Låt A_1 vara händelsen att det första visar kungen, A_2 händelsen att det andra visar kungen, och A_3 händelsen att **exakt ett** av de två mynten visar kungen. Då gäller att A_1 och A_2 är oberoende och $P(A_i) = 0,5$, $i = 1, 2, 3$.

a) Visa att A_1 och A_3 är oberoende och att även A_2 och A_3 är oberoende.

b) Visa att händelserna A_1, A_2, A_3 inte är oberoende, det vill säga att $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Kommentar: Uppgiften visar att oberoende inte är samma sak som parvis oberoende.

Totalpoäng: 10

 Ledtråd 1

Oberoende betyder att sannolikheten för snittet är produkten.

 Ledtråd 2

Visa $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4}$. Vad betyder “första visar kungen och exakt en visar kungen”?

 Ledtråd 3

$A_1 \cap A_3 = A_1 \cap A_2^c$. För b): kan båda visa kungen och exakt ett visa kungen?

 Lösning

a) $A_1 \cap A_3$ betyder att första myntet visar kungen och exakt ett gör det, alltså att andra visar 10:
 $A_1 \cap A_3 = A_1 \cap A_2^c$. Eftersom A_1 och A_2 är oberoende är också A_1 och A_2^c det, så

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3)$$

A_1 och A_3 är alltså oberoende. På samma sätt är $A_2 \cap A_3 = A_1^c \cap A_2$ med sannolikheten $\frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3)$.

b) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ kräver att båda mynten visar kungen och att exakt ett gör det, vilket är omöjligt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Händelserna är parvis oberoende men inte oberoende.

Kontrollerat mot facit.

15. Del 2: lön, kroppsvikt och kön

Om vi betraktar variablerna y = månadslön och x = kön, där $x = 0$ för kvinnor och $x = 1$ för män, så finner man vanligtvis en positiv korrelation. Detsamma gäller om vi betraktar y = månadslön och x = kroppsvikt: vanligtvis finner man även då en positiv korrelation.

Kan det faktum att det finns en positiv korrelation mellan lön och kroppsvikt tolkas som att smala personer diskrimineras? Förklara. (Endast svar i form av ja/nej ger 0 poäng.)

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Korrelation är inte orsak. Uppgiften ger själv en tredje variabel.

Ledtråd 2

Hur hänger kön ihop med både vikt och lön?

Ledtråd 3

Finns det fler variabler som ökar både lön och vikt, till exempel med åldern?

Lösning

Nej, korrelationen visar inte att smala personer diskrimineras.

- **Kön som bakomliggande variabel.** Män väger i genomsnitt mer än kvinnor och har i genomsnitt högre lön. Om man bortser från kön ser det därför ut som att högre vikt hänger ihop med högre lön, även om vikten i sig inte påverkar lönen.
- **Ålder och erfarenhet.** Både lön och vikt tenderar att öka med åldern, vilket också ger en positiv korrelation utan orsakssamband.

För att säga något om diskriminering måste man jämföra personer som är lika i kön, ålder, yrke och erfarenhet men olika i vikt.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [S0008M](#)
 - [Betingad sannolikhet](#)
 - [Exponentialfördelning](#)
 - [Poissonfördelning](#)
 - [Centrala gränsvärdessatsen](#)
 - [Linjära funktioner av stokastiska variabler](#)
 - [Stickprov i par](#)
 - [Tvådimensionell normalfördelning](#)
 - [Betingad fördelning och betingat väntevärde](#)
 - [Oberoende händelser](#)
 - [Korrelation](#)
-