

S0008M-2026-03-16

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #sannolikhetslära #statistik

Kurs: S0008M — Sannolikhetslära och statistik **Datum:** 2026-03-16 **Källa:** originaltentamen ·
lärarens lösningar (bara del 1)

Översikt

Del 1 (uppgift 1–12, bara svar):

- betingad Poissonsannolikhet (1), hypergeometrisk (2) och binomial varians (3)
- väntevärde för en summa (4) och percentil i exponentialfördelningen (5)
- CGS för ett medelvärde av rektangelfördelade väntetider (6)
- kritisk gräns i ett t -test (7), n ur intervallbredd (8), stickprov i par (9) och binomial i hypotesprövning (10)
- kovarianser (11) och summan av två rektangelfördelade väntetider (12)

Del 2 (uppgift 13–15):

- kvartilavstånd i en trunkerad normalfördelning (13)
- t -test ekvivalent med ett konfidensintervall (14)
- okorrelerad men beroende (15)

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen. Lärarens facit täcker bara del 1; del 2 är löst två gånger oberoende av varandra.

1. Betingad sannolikhet i en Poissonfördelning

Den stokastiska variabeln ξ är Poissonfördelad med väntevärde 3,6. Beräkna den betingade sannolikheten $P(\xi \geq 7 \mid \xi \geq 4)$. Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Betingad sannolikhet för händelser som ges av en Poissonvariabel.

Ledtråd 2

$\{\xi \geq 7\} \subset \{\xi \geq 4\}$, så snittet är $\{\xi \geq 7\}$.

Ledtråd 3

$P(\xi \geq 7) = 1 - P(\xi \leq 6)$ och $P(\xi \geq 4) = 1 - P(\xi \leq 3)$.

Lösning

$$P(\xi \geq 7 \mid \xi \geq 4) = \frac{P(\xi \geq 7)}{P(\xi \geq 4)} = \frac{1 - F(6)}{1 - F(3)} = \frac{0,07327}{0,48478} \approx \boxed{15,11 \%}$$

På räknaren. `(1-poissCdf(3.6,0,6))/(1-poissCdf(3.6,0,3))`.

Kontrollerat mot facit.

2. Kortlek: exakt ett hjärter

En vanlig kortlek består av 52 kort, 13 av varje färg (hjärter, klöver, ruter, spader). Du tar fem kort på måfå utan återläggning. Vad är sannolikheten att **exakt 1** av dem är hjärter? Ange ditt svar i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Dragning utan återläggning: **Hypergeometrisk fördelning**.

 Ledtråd 2

$N = 52$, $n = 5$ och 13 “lyckade” kort.

 Ledtråd 3

Välj 1 hjärter av 13 och 4 andra av 39: $\binom{13}{1}\binom{39}{4}/\binom{52}{5}$.

 Lösning

$$P(\xi = 1) = \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{4}}{\binom{52}{5}} \approx \boxed{41,1 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Varians för antalet fungerande lampor

En ljusslinga består av 19 lampor. Varje lampa har sannolikheten 0,02 att sluta fungera inom en treårsperiod, och lamporna fungerar oberoende av varandra. Låt ξ vara antalet fungerande lampor efter tre år. Vad är variansen av ξ ? Svara med tre decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Oberoende försök med samma sannolikhet: **Binomialfördelning**.

 Ledtråd 2

Räkna *fungerande* lampor: $p = 0,98$.

 Ledtråd 3

$$V(\xi) = np(1 - p).$$

 Lösning

$\xi \in \text{Bin}(19; 0,98)$ och

$$V(\xi) = 19 \cdot 0,98 \cdot 0,02 = \boxed{0,372}$$

Variansen blir densamma om man räknar trasiga lampor, eftersom $p(1 - p)$ är symmetriskt.

Kontrollerat mot facit.

4. Väntevärde för en summa av beroende variabler

De kontinuerliga stokastiska variablerna ξ_1 och ξ_2 är **beroende** och har samma fördelning, med frekvensfunktionen $f(x) = 0,08x$ för $0 < x < 5$ och $f(x) = 0$ annars. Låt $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Beräkna väntevärdet av ξ . Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Spelar beroendet någon roll för ett **väntevärde**?

 Ledtråd 2

$$E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2) \text{ gäller alltid.}$$

 Ledtråd 3

$$E(\xi_i) = \int_0^5 x \cdot 0,08x \, dx.$$

 Lösning

$$E(\xi_i) = \int_0^5 0,08x^2 \, dx = 0,08 \cdot \frac{125}{3} = \frac{10}{3}$$

Väntevärdet av en summa kräver inget oberoende:

$$E(\xi) = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} \approx \boxed{6,67}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Percentil i en exponentialfördelning

Slumpvariabeln ξ har en exponentialfördelning med väntevärde 25. Bestäm den 25:e percentilen i fördelningen. Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

En percentil är en **kvantil**: lös $F(x) = 0,25$.

 Ledtråd 2

Exponentialfördelning med väntevärde 25 har $\lambda = 1/25$ och $F(x) = 1 - e^{-x/25}$.

 Ledtråd 3

$$e^{-x/25} = 0,75 \text{ ger } x = -25 \ln 0,75.$$

 Lösning

$$1 - e^{-L/25} = 0,25 \quad \Rightarrow \quad L = -25 \ln 0,75 \approx \boxed{7,19}$$

Kontrollerat mot facit.

6. Genomsnittlig väntetid under 50 dagar

Hans tar tunnelbanan till jobbet varje morgon. Tågen går var tionde minut, men eftersom Hans varken har tidtabell eller klocka betraktar han sin väntetid som slumpmässig. Vad är sannolikheten för att hans genomsnittliga väntetid under en 50-dagarsperiod blir större än 5,7 minuter? Svara i procent med två decimaler.

Kommentar: Som vanligt får approximationer användas om sådana skulle kunna motiveras.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Väntetiden en dag är **rektangelfördelad**, $R(0, 10)$. Medelvärde av 50:
Centrala gränsvärdesatsen.

 Ledtråd 2

$$\mu = 5 \text{ och } \sigma = 10/\sqrt{12}.$$

 Ledtråd 3

$$\bar{\xi} \approx N(5; \sigma/\sqrt{50}) = N(5; 0,408).$$

 Lösning

$$P(\bar{\xi} > 5,7) \approx 1 - \Phi\left(\frac{5,7 - 5}{0,408}\right) = 1 - \Phi(1,715) \approx \boxed{4,32 \%}$$

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit anger 0,044, som man får med avrundat tabellvärde.

7. Utspädd mjölk: kritisk gräns i ett t -test

En mjölkproducent misstänker att en av bönderna späder ut mjölken med vatten. Om vatten är tillsatt bör fryspunkten närma sig vattnets (0°C). Producenten testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

där $\mu_0 = -0,44$, på 5 % signifikansnivå. Ett stickprov på $n = 6$ prover tas. Fryspunkten antas normalfördelad. Testet jämför

$$Q = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{6}}$$

med en konstant k , där $\bar{x}$ och s är stickprovsmedelvärde och stickprovsstandardavvikelse. Vilket värde har k ? Svara med tre decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Q är den vanliga [[t -fördelningen| t -kvoten]].

 Ledtråd 2

Under H_0 är $Q \in t(5)$. Testet är ensidigt uppåt.

 Ledtråd 3

$$k = t_{0,05}(5).$$

 Lösning

Förkasta H_0 om $Q > k$ med $P(Q > k \mid H_0) = 0,05$:

$$k = t_{0,05}(5) = \boxed{2,015}$$

På räknaren. `invt(0.95,5)`.

Kontrollerat mot facit.

8. Antal förpackningar för ett tillräckligt smalt intervall

En stormarknad skär själv till pastej i förpackningar som ska väga 500 gram. För att undersöka om instrumenten behöver kalibreras ska ett stickprov av förpackningar vägas på en våg utan systematiska fel. Standardavvikelsen hos vikten är känd i förväg, $\sigma = 8$ gram, och mätvärdena är observationer från en normalfördelning.

Vilket är det minsta antal observationer som behövs för ett 95 % konfidensintervall med bredd högst 4 gram? Svara med ett heltal.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Känd σ : intervallet är $\bar{x} \pm \lambda_{0,025} \sigma / \sqrt{n}$.

 Ledtråd 2

Bredden är $2 \cdot 1,96 \cdot 8 / \sqrt{n} \leq 4$.

 Ledtråd 3

Lös ut n och avrunda **uppåt**.

 Lösning

$$\frac{2 \cdot 1,96 \cdot 8}{\sqrt{n}} \leq 4 \iff \sqrt{n} \geq 7,84 \iff n \geq 61,47 \Rightarrow n = \boxed{62}$$

Kontrollerat mot facit.

9. Brinntid för facklor: stickprov i par

Vid en jämförelse av brinntiden hos ljusfacklor av två fabrikat, A och B, mättes brinntiden under 6 olika dagar. Varje dag valdes slumpmässigt en fackla av varje fabrikat. De yttre förhållandena (vind, luftfuktighet, temperatur) varierade mellan dagarna. Resultat (minuter):

Dag	1	2	3	4	5	6
A	213,6	556,5	359,7	392,8	296,3	446,3
B	197,8	525,2	354,4	423,9	310,4	426

Antag att en facklas brinntid en given dag är normalfördelad. Beräkna ett 95 % konfidensintervall för den genomsnittliga skillnaden i brinntid, A minus B. Svara med intervallets **övre** gräns med en decimal.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Förhållandena varierar mellan dagarna, och varje dag har en fackla av varje sort: **Stickprov i par**.

 Ledtråd 2

Bilda $z_i = A - B$ per dag och gör ett t -intervall på differenserna.

 Ledtråd 3

$$t_{0,025}(5) = 2,571.$$

 Lösning

Differenserna $A - B$ är 15,8, 31,3, 5,3, -31,1, -14,1 och 20,3, med $\bar{z} = 4,583$ och $s_z = 23,279$.

$$\bar{z} \pm t_{0,025}(5) \frac{s_z}{\sqrt{6}} = 4,583 \pm 2,571 \cdot 9,503 = [-19,8; \boxed{29,0}]$$

Kontrollerat mot facit.

10. Nio forskare: felaktiga förkastanden

I en forskargrupp med 9 personer vill man testa en nollhypotes H_0 mot en enkel mothypotes H_1 . Var och en av de 9 forskarna använder ett test med **signifikansnivå** 0,05 och **styrka** 0,78. Testen baseras på stickprov av storlek 10, och de 9 stickproven är oberoende.

Antag att H_0 är sann. Beräkna sannolikheten att **minst 2** av de 9 forskarna felaktigt drar slutsatsen att H_0 ska förkastas. Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Varje forskare är ett oberoende försök: **Binomialfördelning**. Vilken av de två sannolikheterna gäller när H_0 är sann?

 Ledtråd 2

När H_0 är sann förkastar varje test med sannolikheten $\alpha = 0,05$ (**Signifikansnivå och styrka**). Styrkan är ointressant här.

 Ledtråd 3

$$\xi \in \text{Bin}(9; 0,05) \text{ och } P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi \leq 1).$$

 Lösning

$$P(\xi \geq 2) = 1 - 0,95^9 - 9 \cdot 0,05 \cdot 0,95^8 \approx \boxed{7,12 \%}$$

På räknaren. `1-binomCdf(9,0.05,1)`.

Kontrollerat mot facit.

11. Väntevärde av en produkt via kovarianser

Slumpvariablerna ξ_1, ξ_2, ξ_3 har alla väntevärde 0 och standardavvikelse 1. Antag att $\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = -0,4$, $\text{Cov}(\xi_2, \xi_3) = 0,2$ och $\text{Cov}(\xi_1, \xi_3) = 0,6$. Beräkna $E((\xi_1 + \xi_2) \cdot (\xi_1 + \xi_3))$. Svara med en decimal.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Multiplitera ut och använd **kovariansens** definition.

 Ledtråd 2

Med väntevärde 0 är $E(\xi_i \xi_j) = \text{Cov}(\xi_i, \xi_j)$ och $E(\xi_1^2) = V(\xi_1)$.

 Ledtråd 3

Fyra termer: $E(\xi_1^2) + E(\xi_1 \xi_3) + E(\xi_2 \xi_1) + E(\xi_2 \xi_3)$.

 Lösning

$$E((\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_3)) = V(\xi_1) + \text{Cov}(\xi_1, \xi_3) + \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) + \text{Cov}(\xi_2, \xi_3)$$

$$= 1 + 0,6 - 0,4 + 0,2 = \boxed{1,4}$$

Kontrollerat mot facit.

12. Två bussar: summan av två rektangelfördelade väntetider

Rolf tar två bussar till jobbet varje morgon. För den första bussen är väntetiden $R(0, 10)$ -fördelad. För den andra är väntetiden $R(0, 20)$ -fördelad och oberoende av den första. Vad är sannolikheten att Rolfs **sammanlagda** väntetid en morgon blir **högst 12** minuter? Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 3

Ledtråd 1

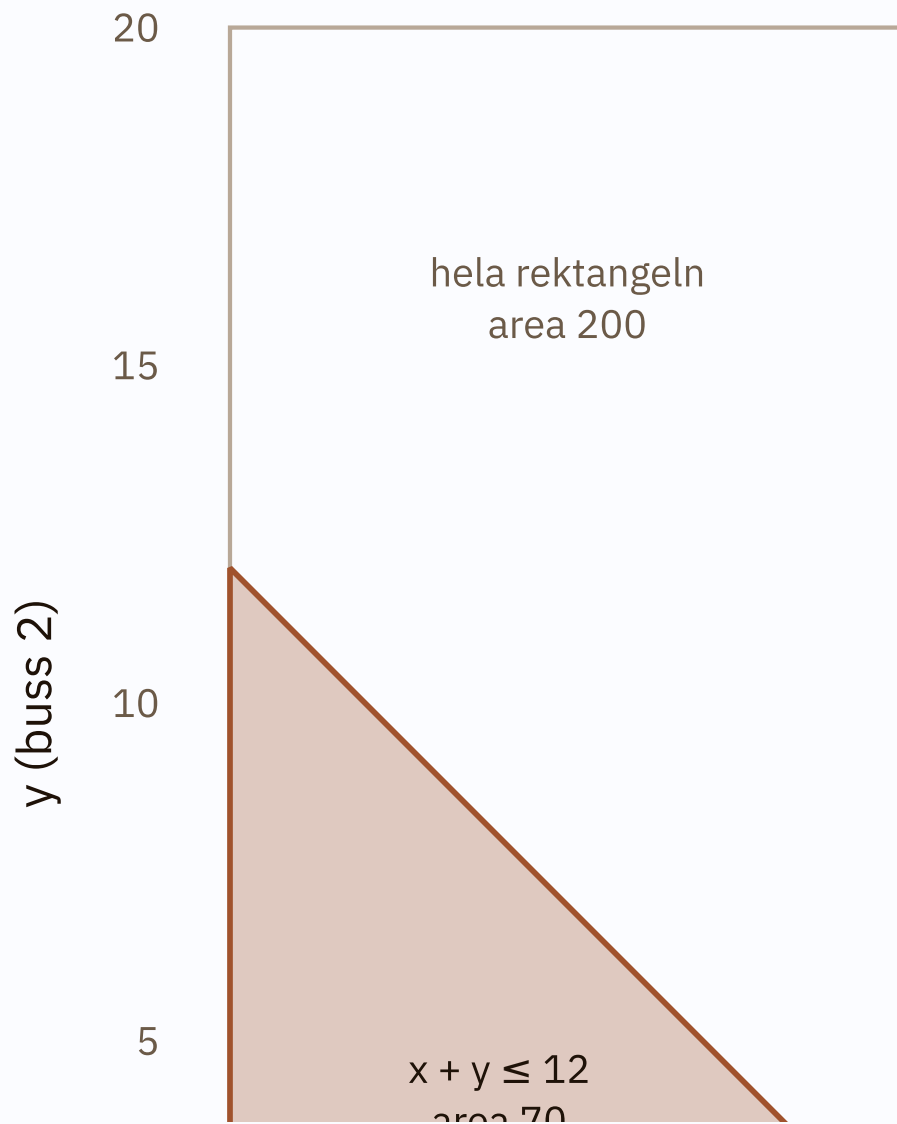
Två oberoende rektangelfördelningar ger likformig fördelning på en rektangel (**Flerdimensionella fördelningar**). Sannolikhet blir area.

Ledtråd 2

Rektangeln är $[0, 10] \times [0, 20]$ med area 200. Rita linjen $x + y = 12$.

Ledtråd 3

Området under linjen är en trapets: $\int_0^{10} (12 - x) dx$.

 Lösning

$$\int_0^{10} (12 - x) dx = 120 - 50 = 70, \quad P(\xi_1 + \xi_2 \leq 12) = \frac{70}{200} = \boxed{35,0 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

13. Del 2: kvartilavstånd i en trunkerad normalfördelning

Den stokastiska variabeln ξ har en trunkerad normalfördelning med frekvensfunktionen

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \geq 0$$

Bestäm **kvartilavståndet** (övre minus nedre kvartil) i fördelningen.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Känn igen f : det är två gånger $N(0, 1)$ -tätheten, men bara för $x \geq 0$.

Ledtråd 2

$$F(x) = \int_0^x 2\varphi(t) dt = 2\Phi(x) - 1 \text{ för } x \geq 0.$$

Ledtråd 3

Kvartilerna löser $2\Phi(q) - 1 = 0,25$ och $2\Phi(q) - 1 = 0,75$.

Lösning

Eftersom $\sqrt{2/\pi} e^{-x^2/2} = 2\varphi(x)$, där φ är $N(0, 1)$ -tätheten, är fördelningsfunktionen för $x \geq 0$

$$F(x) = \int_0^x 2\varphi(t) dt = 2(\Phi(x) - \Phi(0)) = 2\Phi(x) - 1$$

Nedre kvartil. $2\Phi(q_1) - 1 = 0,25 \iff \Phi(q_1) = 0,625 \iff q_1 \approx 0,319$.

Övre kvartil. $2\Phi(q_3) - 1 = 0,75 \iff \Phi(q_3) = 0,875 \iff q_3 \approx 1,150$.

$$\text{kvartilavstånd} = q_3 - q_1 \approx 1,150 - 0,319 = \boxed{0,832}$$

På räknaren. `invNorm(0.875) - invNorm(0.625)`.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

14. Del 2: t -test som motsvarar ett konfidensintervall

Antag att $x_1, \dots, x_{n_1}$ är ett stickprov från $N(\mu_1, \sigma)$ och att $y_1, \dots, y_{n_2}$ är ett stickprov från $N(\mu_2, \sigma)$. Ett sätt att testa $H_0: \mu_1 = \mu_2$ mot $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ på 1 % signifikansnivå är att beräkna ett 99 % konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ och förkasta H_0 om intervallet inte innehåller 0.

Ett annat sätt är att utgå från testvariabeln

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{\text{obs}}^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Använd testvariabeln för att formulera en beslutsregel med 1 % signifikansnivå, som är ekvivalent med testet som bygger på intervallet.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Två stickprov med gemensam σ : vilken fördelning har t när H_0 är sann?

Ledtråd 2

$t \in t(n_1 + n_2 - 2)$ under H_0 . Tvåsidig mothypotes.

Ledtråd 3

Skriv villkoret "0 ligger i intervallet" och lös det för t (Konfidensintervall och hypotesprövning).

Lösning

Intervallet. Med den sammanvägda skattningen σ_{obs}^* är 99 %-intervallet

$$I = \bar{x} - \bar{y} \mp t_{0,005}(n_1 + n_2 - 2) \sigma_{\text{obs}}^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Ekvivalensen. $0 \in I$ betyder exakt att

$$|\bar{x} - \bar{y}| \leq t_{0,005}(n_1 + n_2 - 2) \sigma_{\text{obs}}^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \iff |t| \leq t_{0,005}(n_1 + n_2 - 2)$$

Beslutsregeln.

$$\boxed{\text{förkasta } H_0 \text{ om } |t| > t_{0,005}(n_1 + n_2 - 2)}$$

Den har signifikansnivån 1 %, eftersom $t \in t(n_1 + n_2 - 2)$ när H_0 är sann och $P(|t| > t_{0,005}) = 2 \cdot 0,005$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

15. Del 2: okorrelerade men inte oberoende

Antag att (ξ_1, ξ_2) har en tvådimensionell fördelning som är likformig på den kvadrat som har hörn i punkterna $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, 0)$ och $(0, -1)$. Visa att ξ_1 och ξ_2 är okorrelerade. Är ξ_1 och ξ_2 oberoende?

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Rita området. Det är en romb med centrum i origo, symmetrisk kring båda axlarna.

Ledtråd 2

$\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1 \xi_2) - E(\xi_1)E(\xi_2)$. Använd symmetrin $x \mapsto -x$ (Kovarians).

Ledtråd 3

För oberoende måste den simultana tätheten vara produkten av marginaltätheterna **överallt**. Titta nära ett hörn.

Lösning

Området är romben $A = \{|x|/2 + |y| \leq 1\}$ med area 4, så $f(x, y) = 1/4$ på A .

Okorrelerade. A är symmetrisk vid $x \mapsto -x$. Därför har ξ_1 samma fördelning som $-\xi_1$, så $E(\xi_1) = 0$, och $\xi_1 \xi_2$ har samma fördelning som $-\xi_1 \xi_2$, så $E(\xi_1 \xi_2) = 0$. Alltså

$$\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1 \xi_2) - E(\xi_1)E(\xi_2) = 0$$

Inte oberoende. Marginaltätheterna är positiva för $|x| < 2$ respektive $|y| < 1$, till exempel $f_{\xi_1}(1,9) > 0$ och $f_{\xi_2}(0,9) > 0$. Men punkten $(1,9; 0,9)$ ligger utanför romben, så $f(1,9; 0,9) = 0 \neq f_{\xi_1}(1,9)f_{\xi_2}(0,9)$. Konkret: $P(\xi_1 > 1,5, \xi_2 > 0,5) = 0$, medan båda faktorerna $P(\xi_1 > 1,5)$ och $P(\xi_2 > 0,5)$ är positiva.

Svaret är alltså att ξ_1 och ξ_2 är okorrelerade men **inte** oberoende. Okorrelerade betyder bara att det inte finns något *linjärt* samband; här begränsar värdet på ξ_1 vilka värden ξ_2 kan ta.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Se även

- [S0008M](#)
 - [Poissonfördelning](#)
 - [Hypergeometrisk fördelning](#)
 - [Binomialfördelning](#)
 - [Exponentialfördelning](#)
 - [Centrala gränsvärdessatsen](#)
 - [t-fördelningen](#)
 - [Stickprov i par](#)
 - [Två stickprov](#)
 - [Kovarians](#)
 - [Median och kvantiler](#)
-