

S0008M-2025-12-17

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #sannolikhetslära #statistik

Kurs: S0008M — Sannolikhetslära och statistik **Datum:** 2025-12-17 **Källa:** originaltentamen ·
lärarens lösningar (bara del 1)

Översikt

Del 1 (uppgift 1–12, bara svar):

- betingning med komplement (1), binomial (2) och två tärningar (3–4)
- konstanten i en frekvensfunktion (5), en summa av Poissonvariabler (6) och en exponentialfördelad väntetid (7)
- n för given styrka (8), stickprov i par (9) och n ur intervallbredd (10)
- minsta variansen för en summa (11) och likformig fördelning på en cirkelskiva (12)

Del 2 (uppgift 13–15):

- ett felaktigt P-värde (13)
- väntevärdesriktig skattning med minst varians (14)
- fördelningen för $e^{-\xi}$ (15)

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen. Lärarens facit täcker bara del 1; del 2 är löst två gånger oberoende av varandra.

1. Betingat på att B inte inträffar

För händelserna A och B gäller att $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,41$ och $P(A \cap B) = 0,18$. Beräkna den betingade sannolikheten att A inträffar givet att B inte inträffar, det vill säga $P(A \mid B^c)$. Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Betingad sannolikhet där villkoret är ett komplement.

Ledtråd 2

$$P(A \mid B^c) = P(A \cap B^c) / P(B^c).$$

Ledtråd 3

A delas upp i $A \cap B$ och $A \cap B^c$, så $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

Lösning

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,3 - 0,18}{0,59} \approx \boxed{20,3 \%}$$

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit använder samma formel men anger 37,5 %, vilket inte går ihop med värdena i uppgiften. Troligen gäller facit en variant av tentan med andra siffror.

2. Jordbruk: binomial med en produktsannolikhet

Ett slumpmässigt valt jordbruk odlar ekologiskt med sannolikheten 61 % och har mjölkkor med sannolikheten 87 %. Antag att dessa händelser är oberoende av varandra. Man vill titta på verksamheten hos 12 jordbruk. Vad är sannolikheten att exakt 3 av dessa både odlar ekologiskt och har mjölkkor, och att de övriga kombinerar verksamheterna på något annat sätt? Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Först sannolikheten för ett jordbruk, sedan antalet av tolv (**Binomialfördelning**).

 Ledtråd 2

Oberoende: $p = 0,61 \cdot 0,87$.

 Ledtråd 3

$\xi \in \text{Bin}(12; 0,5307)$ och sök $P(\xi = 3)$.

 Lösning

$$p = 0,61 \cdot 0,87 = 0,5307, \quad P(\xi = 3) = \binom{12}{3} p^3 (1-p)^9 \approx \boxed{3,63 \%}$$

På räknaren. `binomPdf(12,0.61*0.87,3)`.

Kontrollerat mot facit.

3. Två tärningar: summan 3

Två vanliga sexsidiga tärningar kastas. Beräkna sannolikheten att det totala antalet prickar blir exakt 3. Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Klassiska sannolikhetsdefinitionen: gynnsamma genom möjliga.

 Ledtråd 2

Det finns 36 lika sannolika utfall (i, j) .

 Ledtråd 3

Summan 3 fås av $(1, 2)$ och $(2, 1)$.

 Lösning

$$P(\text{summa } 3) = \frac{2}{36} \approx \boxed{5,56 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

4. Variansen för summan av två tärningar

Två tärningar kastas. Låt ξ stå för det totala antalet prickar; de möjliga värdena är $2, 3, \dots, 12$. Beräkna variansen $V(\xi)$. Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Skriv ξ som summan av två oberoende tärningar i stället för att räkna med elva värden.

 Ledtråd 2

En tärning är **likformigt fördelad** på $1, \dots, 6$ med $V = 35/12$.

 Ledtråd 3

Oberoende: varianserna adderas.

 Lösning

$$V(\xi) = V(\xi_1) + V(\xi_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \approx \boxed{5,83}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Konstanten i en frekvensfunktion

Betrakta funktionen $f(x) = a \cdot x + 2$, $0 \leq x \leq 1$, och $f(x) = 0$ annars. Det finns bara ett värde på a som gör f till en frekvensfunktion. Vilket? Svara med en decimal.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

En **frekvensfunktion** har total area 1.

 Ledtråd 2

$$\int_0^1 (ax + 2) dx = a/2 + 2.$$

 Ledtråd 3

Kontrollera också att $f \geq 0$ på $[0, 1]$ med det a du får.

 Lösning

$$\int_0^1 (ax + 2) dx = \frac{a}{2} + 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \boxed{-2,0}$$

Då är $f(x) = 2 - 2x \geq 0$ på $[0, 1]$, så f är en frekvensfunktion.

Kontrollerat mot facit.

6. Summan av 40 Poissonvariabler

Slumpvariablerna $\xi_1, \dots, \xi_{40}$ är oberoende och Poissonfördelade med väntevärde 2. Låt ξ beteckna summan. Beräkna $P(\xi \leq 90)$. Svara i procent med två decimaler.

Kommentar: Som vanligt får approximationer användas om sådana skulle kunna motiveras.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

En summa av oberoende **Poissonvariabler** är själv Poissonfördelad. Alternativt: **Centrala gränsvärdessatsen**.

Ledtråd 2

$\xi \in \text{Po}(80)$ exakt, med $E = V = 80$.

Ledtråd 3

Exakt med `poissCdf(80,0,90)`, eller $\Phi((90 - 80)/\sqrt{80})$ med CGS.

Lösning

$\xi \in \text{Po}(80)$, så exakt

$$P(\xi \leq 90) = \sum_{k=0}^{90} e^{-80} \frac{80^k}{k!} \approx \boxed{87,86 \%}$$

Med CGS utan halvkorrektion blir det $\Phi(10/\sqrt{80}) = \Phi(1,118) \approx 86,82 \%$, och med **halvkorrektion** $\Phi(10,5/\sqrt{80}) \approx 87,98 \%$.

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit använder CGS utan halvkorrektion och anger 86,82 %.

7. Blockkedja: exponentialfördelad väntetid

I en blockkedja har tiden mellan block, räknat i minuter, en exponentialfördelning. I genomsnitt läggs 6 block till kedjan per timme. Vad är sannolikheten att det från en given tidpunkt dröjer **längre än 30** minuter tills nästa block? Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Exponentialfördelning. Minneslösheten gör att "från en given tidpunkt" inte spelar någon roll.

Ledtråd 2

6 block per timme betyder i genomsnitt 10 minuter mellan block: $\lambda = 0,1$ per minut.

Ledtråd 3

$$P(\xi > 30) = e^{-\lambda \cdot 30}.$$

Lösning

$$P(\xi > 30) = e^{-0,1 \cdot 30} = e^{-3} \approx \boxed{4,98 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

8. Antal observationer för given styrka

Antag att du har ett stickprov av storlek n från $N(\mu; 0,5)$ och vill testa $H_0 : \mu = 10$ mot $H_1 : \mu = 10,3$ på 5 % signifikansnivå. Hur stort måste n vara för att testet ska få en styrka som är minst 95 %? Svara med det minsta heltalet n .

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Enkla hypoteser med krav på både α och styrka (Signifikansnivå och styrka).

Ledtråd 2

Två villkor på k : $k = 10 + \lambda_{0,05} \sigma / \sqrt{n}$ och $k = 10,3 - \lambda_{0,05} \sigma / \sqrt{n}$.

Ledtråd 3

$n = ((\lambda_\alpha + \lambda_\beta) \sigma / (\mu_1 - \mu_0))^2$. Avrunda uppåt.

Lösning

$$n = \left(\frac{(1,6449 + 1,6449) \cdot 0,5}{0,3} \right)^2 \approx 30,06 \Rightarrow n = \boxed{31}$$

Kontrollerat mot facit.

9. Bildäck: stickprov i par

För att jämföra förslitningen hos bildäck av två typer, A och B, monterade man ett däck av vardera typen på bakhjulen på sju bilar av samma märke. Varje bil kördes 900 mil, men av olika förare och på olika vägar. Förslitningen blev:

Bil	1	2	3	4	5	6
A	1	0,9	0,8	1,6	0,5	0,8
B	0,9	0,7	0,8	1,2	0,4	0,8

Bestäm, under lämpliga normalfördelningsantaganden, ett 90 % konfidensintervall för skillnaden A – B i genomsnittlig förslitning. Ange den **övre** gränsen med tre decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Båda däcktyperna sitter på samma bil: **Stickprov i par**.

Ledtråd 2

Differenserna A – B är ett stickprov ur $N(\Delta, \sigma)$; gör ett t -intervall.

Ledtråd 3

Tvåsidigt 90 % med $n = 7$: $t_{0,05}(6) = 1,943$.

Lösning

Differenserna är 0,1, 0,2, 0, 0,4, 0,1, 0 och 0,2, med $\bar{z} = 0,1429$ och $s_z = 0,1397$.

$$\bar{z} + t_{0,05}(6) \frac{s_z}{\sqrt{7}} = 0,1429 + 1,943 \cdot 0,0528 \approx \boxed{0,245}$$

Kontrollerat mot facit.

10. Antal mätningar ur intervallets bredd

En mätmetod ger observationer som kan antas vara ett stickprov från $N(\mu, 1)$, där μ är konstanten man vill mäta. I en rapport presenterades ett 95 % konfidensintervall för μ . Hur många mätningar hade gjorts om intervallet var $[10,108; 10,892]$? Svara med ett heltal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Känd σ : intervallet är $\bar{x} \pm 1,96 \sigma / \sqrt{n}$.

Ledtråd 2

Bredden $10,892 - 10,108 = 0,784$ ska vara $2 \cdot 1,96 / \sqrt{n}$.

Ledtråd 3

Lös ut $\sqrt{n}$.

Lösning

$$0,784 = \frac{2 \cdot 1,96}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 5 \Rightarrow n = \boxed{25}$$

Kontrollerat mot facit.

11. Minsta möjliga variansen för en summa

Antag att du har två normalfördelade slumpvariabler med varians 4 respektive 49. Om de är oberoende är variansen för summan 53. Om de är beroende kan variansen för summan vara både mindre och större än 53, men inte hur liten som helst. Vad är det **minsta** möjliga värdet? Svara med en decimal.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

$$V(\xi_1 + \xi_2) = V(\xi_1) + V(\xi_2) + 2 \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) \text{ (Kovarians)}.$$

 Ledtråd 2

$$\operatorname{Cov} = \rho \sigma_1 \sigma_2 \text{ med } -1 \leq \rho \leq 1 \text{ (Korrelation)}.$$

 Ledtråd 3

Det minsta värdet fås vid $\rho = -1$.

 Lösning

Med $\sigma_1 = 2$ och $\sigma_2 = 7$:

$$V(\xi_1 + \xi_2) = 4 + 49 + 2\rho \cdot 2 \cdot 7 \geq 53 - 28 = \boxed{25}$$

Minimum nås vid $\rho = -1$, och då är $V = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = (2 - 7)^2 = 25$.

Kontrollerat mot facit.

12. Likformig fördelning på en cirkelskiva

En partikels position är likformigt fördelad på cirkelskivan med centrum i origo och radie 9. Beräkna sannolikheten att partikelns avstånd från origo är **större än** 2,5 men **mindre än** 7. Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 3

 Ledtråd 1

Likformig fördelning i planet: sannolikhet = area delat med total area
(Flerdimensionella fördelningar).

 Ledtråd 2

Området är en ring mellan radierna 2,5 och 7.

 Ledtråd 3

π tar ut sig: $(7^2 - 2,5^2)/9^2$.

 Lösning

$$P(2,5 < \zeta < 7) = \frac{\pi(7^2 - 2,5^2)}{\pi \cdot 9^2} = \frac{42,75}{81} \approx \boxed{52,78 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

13. Del 2: en tärning med 100 sidor

Lars har köpt en tärning med 100 sidor. Han misstänker att den inte är korrekt konstruerad och vill se om han kan påstå att alla nummer *inte* är lika sannolika, med 5 % felrisk. Lars kastar tärningen och får talet 98. Han menar att eftersom P-värdet är 2 % kan man påstå att alla nummer inte är lika sannolika med 5 % felrisk.

Håller du med Lars i hans slutsats och resonemang? Om inte, kritisera slutsatsen och/eller resonemanget.

Totalpoäng: 10

 Ledtråd 1

Vad är ett P-värde (**direktmetoden**)? Det är sannolikheten, under H_0 , för ett utfall som är *minst lika extremt* som det observerade.

Ledtråd 2

Under H_0 har varje sida sannolikheten $1/100$. Är 98 mer “extremt” än till exempel 37 i förhållande till mothypotesen?

Ledtråd 3

Mothypotesen “alla nummer är inte lika sannolika” pekar inte ut någon riktning. Kan ett enda kast alls ge belägg mot den?

Lösning

Nej, varken slutsatsen eller resonemanget håller.

- **P-värdet är felaktigt definierat.** Ett P-värde är sannolikheten under H_0 att få ett resultat som är *minst lika extremt* som det observerade, mätt i mothypotesens riktning. Även med Lars egen tolkning, att höga tal är extrema, blir $P(\text{utfall} \geq 98) = 3/100$ och inte 2 %. Men mothypotesen säger bara att tärningen är skev, inte att höga tal är vanligare. Ett resultat nära 100 är inte mer extremt än ett nära 50.
- **Alla utfall är lika troliga under H_0 .** Varje nummer har sannolikheten $1/100$. Med Lars resonemang skulle *varje* utfall kunna ges ett litet “P-värde”, och han skulle förkasta H_0 oavsett vad tärningen visar. Då är den verkliga felrisken inte 5 % utan nära 100 %.
- **Testet väljs efter data.** Att titta på utfallet och sedan välja vilken sorts avvikelse som räknas som extrem gör att signifikansnivån inte längre gäller.
- **Ett kast räcker inte.** För att pröva om alla 100 sidor är lika sannolika behövs många kast och en testvariabel som bestäms i förväg, till exempel antalet gånger varje sida kommer upp.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

14. Del 2: väntevärdesriktig skattning med minst varians

Antag att $\xi_1 \in N(\theta, 2)$ och $\xi_2 \in N(\theta, 3)$ är oberoende. Som skattning av θ vill man använda en linjärkombination $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$. Hitta den väntevärdesriktiga linjärkombination som har minst varians.

Totalpoäng: 10

 Ledtråd 1

Väntevärdesriktig betyder $E(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = \theta$ för alla θ .

 Ledtråd 2

Det ger $c_1 + c_2 = 1$. Variansen är $4c_1^2 + 9c_2^2$ (standardavvikelserna är 2 och 3).

 Ledtråd 3

Sätt $c_2 = 1 - c_1$ och minimera en andragsgradsfunktion i c_1 .

 Lösning

Väntevärdesriktig. $E(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = (c_1 + c_2)\theta = \theta$ för alla θ kräver $c_1 + c_2 = 1$.

Variansen. Med oberoende och $c_2 = 1 - c_1$:

$$V(c_1) = 4c_1^2 + 9(1 - c_1)^2$$

Minimera.

$$V'(c_1) = 8c_1 - 18(1 - c_1) = 26c_1 - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{9}{13}, \quad c_2 = \frac{4}{13}$$

$V''(c_1) = 26 > 0$, så det är ett minimum. Skattningen är

$$\boxed{\theta^* = \frac{9}{13}\xi_1 + \frac{4}{13}\xi_2}, \quad V(\theta^*) = \frac{36}{13} \approx 2,77$$

Vikterna är omvänt proportionella mot varianserna: den noggrannare mätningen ξ_1 får större vikt. Variansen 2,77 är mindre än både 4 och 9.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

15. Del 2: fördelningen för $e^{-\xi}$

Antag att ξ har en $\text{Exp}(1)$ -fördelning. Bestäm fördelningsfunktion och frekvensfunktion för $\zeta = e^{-\xi}$.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Funktion av en stokastisk variabel: börja med fördelningsfunktionen $F_{\zeta}(z) = P(\zeta \leq z)$.

Ledtråd 2

$\xi > 0$ ger $0 < \zeta < 1$. För $0 < z < 1$: $e^{-\xi} \leq z \iff \xi \geq -\ln z$.

Ledtråd 3

$P(\xi \geq x) = e^{-x}$ för $\text{Exp}(1)$.

Lösning

Eftersom $\xi > 0$ är $0 < \zeta < 1$. För $0 < z < 1$:

$$F_{\zeta}(z) = P(e^{-\xi} \leq z) = P(\xi \geq -\ln z) = e^{-(-\ln z)} = z$$

Alltså

$$F_{\zeta}(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ z, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases} \quad f_{\zeta}(z) = \begin{cases} 1, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

ζ är alltså $R(0, 1)$ -fördelad.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Se även

- S0008M
 - Betingad sannolikhet
 - Binomialfördelning
 - Poissonfördelning
 - Exponentialfördelning
 - Enkla hypoteser
 - Stickprov i par
 - Kovarians
 - Direktmetoden
 - Punktskattning
 - Icke-linjära funktioner av stokastiska variabler
-