

S0008M-2025-10-24

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #sannolikhetslära #statistik

Kurs: S0008M — Sannolikhetslära och statistik **Datum:** 2025-10-24 **Källa:** originaltentamen ·
lärarens lösningar

Översikt

Del 1 (uppgift 1–12, bara svar):

- exakt ett av två fel (1), total sannolikhet (2) och slumpvandring (3)
- väntevärde för en linjär funktion (4) och σ ur median och percentil (5)
- CGS för en kedja (6) och Poisson (7)
- μ för given styrka (8), kritisk gräns för två stickprov (9) och teckenintervall (10)
- sannolikhet ur en tvådimensionell täthet (11) och betingat väntevärde i tvådimensionell normalfördelning (12)

Del 2 (uppgift 13–15):

- vaccintest med direktmetoden (13)
- lagen om total förväntan (14)
- fördelningen för $-\ln \xi$ (15)

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Exakt ett av två fel

Vid tillverkning av en viss typ av byggelement kan två slags fel, fel a och fel b , uppkomma. Låt A och B vara händelserna att fel a respektive fel b uppkommer. Man vet att $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,2$ och $P(A \mid B) = 0,35$. Beräkna sannolikheten att en enhet har **exakt ett** av de två felen. Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Exakt ett är $A \cup B$ utom snittet: $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Ledtråd 2

Snittet fås ur den **betingade sannolikheten**.

Ledtråd 3

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B).$$

Lösning

$$P(A \cap B) = 0,35 \cdot 0,2 = 0,07$$

$$P(\text{exakt ett}) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,1 + 0,2 - 0,14 = \boxed{16,0 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Batterier från tre fabriker

Ett företag tillverkar batterier i tre fabriker: A står för 53 % av tillverkningen, B för 20 % och C för 27 % . Ett batteri från A räcker mer än 100 driftstimmar med sannolikheten 90 %, från B 95 % och från C 96 %. Batterierna blandas i ett centrallager. Vad är sannolikheten att ett batteri som tas på måfå räcker mer än 100 timmar? Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Olika källor med olika sannolikheter: [Lagen om total sannolikhet](#).

 Ledtråd 2

$$P(H) = \sum P(H \mid \text{fabrik}) P(\text{fabrik}).$$

 Ledtråd 3

Tre termer: $0,9 \cdot 0,53 + 0,95 \cdot 0,2 + 0,96 \cdot 0,27$.

 Lösning

$$P(H) = 0,9 \cdot 0,53 + 0,95 \cdot 0,20 + 0,96 \cdot 0,27 = \boxed{92,62 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Slumpvandring: avstånd minst 4

En partikel startar på talet 0 och hoppar ett steg varje sekund, med steglängd 1 i negativ eller positiv riktning med sannolikheten 0,5 vardera. Hoppen är oberoende. Vad är sannolikheten att partikeln vid tiden 8 sekunder befinner sig på ett avstånd från 0 som är **större än eller lika med 4**? Svara i procent med en decimal.

Kommentar: Med avståndet menas absolutbeloppet av positionen.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Räkna antalet steg åt höger: [Binomialfördelning](#).

 Ledtråd 2

Med η steg åt höger av 8 är positionen $\eta - (8 - \eta) = 2\eta - 8$, och $\eta \in \text{Bin}(8; 0,5)$.

 Ledtråd 3

$|2\eta - 8| \geq 4 \iff \eta \leq 2 \text{ eller } \eta \geq 6$. Symmetri ger $2P(\eta \leq 2)$.

 Lösning

$$P(|2\eta - 8| \geq 4) = P(\eta \leq 2) + P(\eta \geq 6) = 2P(\eta \leq 2) = 2 \cdot \frac{1 + 8 + 28}{256} \approx \boxed{28,9 \%}$$

På räknaren. `2*binomCdf(8,0.5,2)`.

Kontrollerat mot facit.

4. Håkans mjölkkostnad

Hungrige Håkan dricker som mest 3 liter mjölk per dag. Hans dagliga konsumtion ξ har sannolikhetsfördelningen

k (liter)	0	1	2	3
$P(\xi = k)$	0,2	0,2	0,5	0,1

En liter mjölk kostar 12,5 kr. Hur mycket spenderar Håkan i **genomsnitt** på mjölk per dag? Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Genomsnitt över många dagar är ett **väntevärde**.

 Ledtråd 2

Kostnaden är $\eta = 12,5 \xi$.

 Ledtråd 3

$$E(12,5 \xi) = 12,5 E(\xi).$$

 Lösning

$$E(\xi) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,1 = 1,5$$

$$E(12,5 \xi) = 12,5 \cdot 1,5 = \boxed{18,75 \text{ kr}}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Standardavvikelse ur median och 95:e percentil

I en viss **normalfördelning** är medianen 8 och den 95:e percentilen (L_{95} med bokens beteckning) 12,5. Vad är standardavvikelsen? Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

I en **normalfördelning** är medianen lika med μ .

 Ledtråd 2

$$L_{95} = \mu + \lambda_{0,05} \sigma \text{ (Median och kvantiler).}$$

 Ledtråd 3

$$8 + 1,6449 \sigma = 12,5.$$

 Lösning

$$\sigma = \frac{12,5 - 8}{\lambda_{0,05}} = \frac{4,5}{1,6449} \approx \boxed{2,74}$$

Kontrollerat mot facit.

6. Kedja av hundra länkar

En kedja sätts ihop av många små länkar. Längden (cm) för en länk är $\xi \in R(0,5; 1,5)$. Om en kedja med hundra länkar bildas, hur stor är sannolikheten att kedjans längd blir **högst 105 cm**?

Kommentar: Som vanligt får approximationer användas om sådana skulle kunna motiveras.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

En summa av 100 oberoende länkar: **Centrala gränsvärdessatsen**.

 Ledtråd 2

[[Likformig fördelning|R(0,5; 1,5)]] har $\mu = 1$ och $\sigma = 1/\sqrt{12}$.

 Ledtråd 3

Summan är $\approx N(100; \sqrt{100}/\sqrt{12}) = N(100; 2,887)$.

 Lösning

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} \xi_i \leq 105\right) \approx \Phi\left(\frac{105 - 100}{10/\sqrt{12}}\right) = \Phi(1,732) \approx \boxed{95,84 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

7. Bitcoinblock per timme

Antalet block som läggs till Bitcoins blockkedja på en timme är Poissonfördelat. Tiden mellan block är i genomsnitt 10 minuter. Vad är sannolikheten att **fler än 5** block läggs till under en viss timme? Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Poissonfördelning: bestäm λ per timme.

 Ledtråd 2

I genomsnitt 10 minuter mellan block ger 6 block per timme: $\lambda = 6$.

 Ledtråd 3

$$P(\xi > 5) = 1 - P(\xi \leq 5).$$

 Lösning

$$P(\xi > 5) = 1 - \sum_{k=0}^5 e^{-6} \frac{6^k}{k!} = 1 - 0,4457 \approx \boxed{55,43 \%}$$

På räknaren. `1-poissCdf(6,0,5)`.

Kontrollerat mot facit.

8. För vilket μ blir styrkan 90 %?

Anders har ett observerat stickprov $x_1, \dots, x_{10}$ från $N(\mu, \sigma)$ med $\sigma = 2$ och vill testa $H_0 : \mu = 1$ mot $H_1 : \mu > 1$. Han väljer beslutsregeln "förkasta H_0 om $\bar{x} > k$ " med $k = 2,239613$. För vilket värde på μ blir testets styrka 90 %? Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Styrkefunktion: $S(\mu) = P(\bar{\xi} > k \mid \mu)$.

Ledtråd 2

$\bar{\xi} \in N(\mu; 2/\sqrt{10})$, så $S(\mu) = 1 - \Phi((k - \mu)/(2/\sqrt{10}))$.

Ledtråd 3

$S(\mu) = 0,9$ ger $(k - \mu)/(2/\sqrt{10}) = -\lambda_{0,1} = -1,2816$.

Lösning

$$1 - \Phi\left(\frac{2,2396 - \mu}{2/\sqrt{10}}\right) = 0,9 \iff \frac{2,2396 - \mu}{0,6325} = -1,2816$$

$$\mu = 2,2396 + 1,2816 \cdot 0,6325 \approx \boxed{3,05}$$

Kontrollerat mot facit.

9. Kritisk gräns för ett test med två stickprov

Följande är ett observerat stickprov $x_1, \dots, x_7$ från $N(a, \sigma_1)$ (a och σ_1 okända):

6,9	5,2	6,8	5,1	6	5,1	6,4
-----	-----	-----	-----	---	-----	-----

Följande är ett observerat stickprov $y_1, \dots, y_7$ från $N(b, \sigma_2)$ (b och σ_2 okända):

3	3,6	4,4	4	4,7	5,9	3,2
---	-----	-----	---	-----	-----	-----

Stickproven är oberoende och $\sigma_1 = \sigma_2$. För att testa $H_0 : a = b$ mot $H_1 : a > b$ används testvariabeln

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{\text{obs}}^* \sqrt{2/7}}, \quad \sigma_{\text{obs}}^* = \sqrt{(s_x^2 + s_y^2)/2}$$

Beslutsregeln är: förkasta H_0 om $t > k$. Vilket värde ska k ha för att testet ska få 10 % signifikansnivå? Svara med tre decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Två stickprov med gemensam σ : vilken t -fördelning har testvariabeln?

Ledtråd 2

Frihetsgraderna är $n_1 + n_2 - 2 = 12$. Datan behövs inte för att bestämma k .

Ledtråd 3

Ensidigt test: $k = t_{0,10}(12)$.

Lösning

Under H_0 är $t \in t(7 + 7 - 2) = t(12)$, så

$$k = t_{0,10}(12) = \boxed{1,356}$$

Mätvärdena behövs bara för att räkna ut själva testvariabeln, inte för gränsen.

På räknaren. `invT(0.9,12)`.

Kontrollerat mot facit.

10. Konfidensgrad för ett teckenintervall

Antag att du har ett stickprov $\xi_1, \dots, \xi_8$ från en kontinuerlig fördelning som *inte* är en normalfördelning. Man vill skatta medianen med metoden med teckenintervall. Beräkna konfidensgraden för intervallet $[\xi_{(3)}, \xi_{(6)}]$. Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 1

Ledtråd 1

Teckenintervall: η = antal observationer under medianen är $\text{Bin}(8; 0,5)$.

Ledtråd 2

m ligger mellan $\xi_{(3)}$ och $\xi_{(6)}$ när minst 3 observationer är under m och minst 3 över.

Ledtråd 3

Det är $3 \leq \eta \leq 5$. Intervallet är inte symmetriskt, så formeln $1 - 2P(\eta \leq k)$ gäller inte direkt.

Lösning

$\xi_{(3)} \leq m \leq \xi_{(6)}$ betyder att minst 3 observationer ligger under m och minst 3 över, alltså $3 \leq \eta \leq 5$:

$$P(3 \leq \eta \leq 5) = \frac{\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5}}{2^8} = \frac{56 + 70 + 56}{256} \approx \boxed{71,1 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

11. Sannolikhet ur en tvådimensionell frekvensfunktion

Den tvådimensionella slumpvariabeln (ξ, η) har frekvensfunktionen $f(x, y) = c \cdot x$ om $0 \leq x, y \leq 1$ och $f(x, y) = 0$ annars, där c är en konstant. Beräkna sannolikheten $P(\xi \leq 0,6 \text{ och } \eta \leq 0,4)$. Svara i procent med en decimal. *Tips: bestäm först konstanten c .*

Totalpoäng: 3

Ledtråd 1

Den totala volymen under f är 1 (Flerdimensionella fördelningar).

Ledtråd 2

$$\int_0^1 \int_0^1 cx \, dx \, dy = c/2 = 1, \text{ så } c = 2.$$

Ledtråd 3

$f(x, y) = 2x \cdot 1$ är en produkt: ξ och η är oberoende.

Lösning

$c/2 = 1$ ger $c = 2$. Tätheten $2x \cdot 1$ är en produkt av $f_\xi(x) = 2x$ och $f_\eta(y) = 1$ på $[0, 1]$, så variablerna är oberoende:

$$P(\xi \leq 0,6, \eta \leq 0,4) = \int_0^{0,6} 2x \, dx \cdot 0,4 = 0,36 \cdot 0,4 = \boxed{14,4 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

12. Majas förväntade utgifter givet Joels

Majas och Joels utgifter för kursmaterial (kr) är slumpmässiga. Majas utgifter per månad har väntevärdet 470 kr och standardavvikelsen 32 kr, Joels väntevärdet 440 kr och standardavvikelsen 22 kr. Utgifterna är beroende med korrelation 0,6 och tvådimensionellt normalfördelade. Givet att Joels utgifter en viss månad är 430 kr, beräkna Majas förväntade utgifter samma månad. Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Betingad fördelning i en tvådimensionell normalfördelning.

Ledtråd 2

$$E(\eta \mid \xi = x) = \mu_\eta + \rho \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} (x - \mu_\xi).$$

Ledtråd 3

Här är η Maja och ξ Joel: $470 + 0,6 \cdot \frac{32}{22} (430 - 440)$.

Lösning

$$E(\text{Maja} \mid \text{Joel} = 430) = 470 + 0,6 \cdot \frac{32}{22} (430 - 440) = 470 - 8,73 = \boxed{461,27 \text{ kr}}$$

Kontrollerat mot facit.

13. Del 2: har vaccinet effekt?

Under coronapandemin rapporterade svt.se: "Modernas vaccin har testats på 30 000 människor, hälften fick två doser vaccin, hälften fick placebo. [...] 95 fall av coronasmitta upptäcktes, 90 av dem hittades i gruppen som fick placebo."

Kan man utifrån detta påstå att vaccinet har en effekt? Ställ upp ett ensidigt hypotestest och använd direktmetoden för att besvara frågan.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Betrakta bara de 95 smittade. Om vaccinet inte har någon effekt, hur fördelar de sig mellan grupperna?

Ledtråd 2

Grupperna är lika stora, så under H_0 hamnar varje smittad i vaccingruppen med sannolikheten 0,5: $\xi \in \text{Bin}(95; 0,5)$.

Ledtråd 3

Direktmetoden: $\alpha_0 = P(\xi \leq 5 \mid H_0)$, eftersom få smittade i vaccingruppen talar för effekt.

Lösning

Modell. ξ = antal av de 95 smittade som fått vaccin. Om vaccinet inte påverkar risken är det lika troligt att en smittad kommer från vardera gruppen, eftersom grupperna är lika stora, så $\xi \in \text{Bin}(95; 0,5)$.

Hypoteser. H_0 : vaccinet har ingen effekt ($p = 0,5$) mot H_1 : vaccinet minskar risken att smittas ($p < 0,5$).

Observation. $x = 95 - 90 = 5$.

Direktmetoden.

$$\alpha_0 = P(\xi \leq 5 \mid p = 0,5) = \sum_{k=0}^5 \binom{95}{k} 0,5^{95} \approx 1,5 \cdot 10^{-21}$$

Slutsats. α_0 är försumbart litet, mycket mindre än varje rimlig signifikansnivå. H_0 förkastas: vaccinet har med mycket liten felrisk en effekt.

På räknaren. `binomCdf(95,0.5,0,5)`.

Kontrollerat mot facit.

14. Del 2: tärning och dragning utan återläggning

En låda innehåller tio röda bollar. Du kastar en tärning och lägger sedan till lika många vita bollar som tärningen visar. Sedan tar du fem bollar utan återläggning. Vad är väntevärdet av antalet röda bollar bland de fem?

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Två steg av slump: först tärningen, sedan dragningen. Betinga på tärningens utfall (**Betingad fördelning och betingat väntevärde**).

Ledtråd 2

Givet $\eta = y$ är antalet röda **hypergeometriskt** med $N = 10 + y$, $n = 5$ och $p = 10/(10 + y)$.

Ledtråd 3

$E(\xi \mid \eta = y) = np = 50/(10 + y)$. Lagen om total förväntan: $E(\xi) = \sum_y P(\eta = y)E(\xi \mid \eta = y)$.

Lösning

Låt η = tärningens utfall och ξ = antal röda bland de fem.

Betingat. Givet $\eta = y$ innehåller lådan $10 + y$ bollar varav 10 röda, så $\xi \in \text{Hyp}(10 + y, 5, \frac{10}{10+y})$ och

$$E(\xi \mid \eta = y) = 5 \cdot \frac{10}{10 + y} = \frac{50}{10 + y}$$

Lagen om total förväntan.

$$E(\xi) = \sum_{y=1}^6 \frac{1}{6} \cdot \frac{50}{10 + y} = \frac{50}{6} \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{16} \right) \approx \boxed{3,76}$$

Kontrollerat mot facit.

15. Del 2: fördelningen för $-\ln \xi$

Antag att ξ har en $R(0, 1)$ -fördelning. Bestäm fördelningsfunktion och frekvensfunktion för $\zeta = -\ln(\xi)$.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Funktion av en stokastisk variabel: börja med $F_{\zeta}(z) = P(\zeta \leq z)$.

Ledtråd 2

$0 < \xi < 1$ ger $\zeta > 0$. För $z > 0$: $-\ln \xi \leq z \iff \xi \geq e^{-z}$.

Ledtråd 3

$P(\xi \geq a) = 1 - a$ för $R(0, 1)$ och $0 < a < 1$.

 Lösning

För $z > 0$:

$$F_{\zeta}(z) = P(-\ln \xi \leq z) = P(\xi \geq e^{-z}) = 1 - e^{-z}$$

och $F_{\zeta}(z) = 0$ för $z \leq 0$. Derivering ger

$$F_{\zeta}(z) = 1 - e^{-z}, \quad f_{\zeta}(z) = e^{-z}, \quad z > 0$$

ζ är alltså [[Exponentialfördelning|Exp(1)-fördelad]]. Det är omvändningen till december 2025, uppgift 15.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- S0008M
- Lagen om total sannolikhet
- Binomialfördelning
- Centrala gränsvärdessatsen
- Styrkefunktion
- Två stickprov
- Teckenintervall
- Tvådimensionell normalfördelning
- Direktmetoden
- Betingad fördelning och betingat väntevärde
- Icke-linjära funktioner av stokastiska variabler