

S0008M-2025-08-26

19 okt. 2026, 13 min läsning

UTKAST

#tenta #sannolikhetslära #statistik

Kurs: S0008M — Sannolikhetslära och statistik **Datum:** 2025-08-26 **Källa:** originaltentamen ·
lärarens lösningar (bara del 1)

Översikt

Del 1 (uppgift 1–12, bara svar):

- exakt en av fyra oberoende händelser (1), Bayes (2) och slumpvandring (3)
- rektangelfördelning (4), linjär funktion av en Poissonvariabel (5) och CGS för exponentialfördelade variabler (6)
- skillnad mellan två normalfördelade variabler (7), kritisk gräns i ett z-test (8) och två stickprov (9)
- binomial i hypotesprövning (10), skillnad i tvådimensionell normalfördelning (11) och kovarians (12)

Del 2 (uppgift 13–15):

- standardavvikelse ur en sannolikhet (13)
- fullständig lösning av uppgift 6 (14)
- teckentest för varmare novembermånader (15)

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen. Lärarens facit täcker bara del 1; del 2 är löst två gånger oberoende av varandra.

1. Exakt en av fyra oberoende händelser

Händelserna A, B, C, D är oberoende, där $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,7$, $P(C) = 0,9$ och $P(D) = 0,8$. Beräkna sannolikheten att **exakt en** av de fyra händelserna inträffar. Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Oberoende händelser: dela upp "exakt en" i fyra disjunkta fall.

Ledtråd 2

"Bara A " är $A \cap B^c \cap C^c \cap D^c$, och oberoendet ger en produkt.

Ledtråd 3

Summera $P(A)P(B^c)P(C^c)P(D^c)$ och motsvarande för B, C, D .

Lösning

$$P(\text{bara } A) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,0018$$

$$P(\text{bara } B) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,0098$$

$$P(\text{bara } C) = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,0378$$

$$P(\text{bara } D) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,0168$$

De fyra fallen är disjunkta, så

$$P(\text{exakt en}) = 0,0018 + 0,0098 + 0,0378 + 0,0168 = \boxed{6,62 \%}$$

(I originalet står $P(C)$ två gånger; det andra värdet, 0,8, gäller D .)

Kontrollerat mot facit.

2. Skaderisk för kvinnor

På en arbetsplats skadas 1 % av personalen under ett år. Bland de skadade är 57 % män. Av de anställda är 70 % män och 30 % kvinnor. Beräkna skaderisken för kvinnor, det vill säga sannolikheten att en person skadas givet att personen är en kvinna. Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Villkoret är "vänt": du vet $P(\text{man} \mid \text{skadad})$ men söker $P(\text{skadad} \mid \text{kvinna})$ (Bayes sats).

Ledtråd 2

$$P(S \mid K) = P(K \cap S)/P(K).$$

Ledtråd 3

$$P(K \cap S) = P(S) - P(M \cap S) = 0,01 - 0,57 \cdot 0,01.$$

Lösning

$$P(M \cap S) = P(M \mid S)P(S) = 0,57 \cdot 0,01 = 0,0057, \quad P(K \cap S) = 0,01 - 0,0057 = 0,0043$$

$$P(S \mid K) = \frac{P(K \cap S)}{P(K)} = \frac{0,0043}{0,30} \approx \boxed{1,43 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Slumpvandring: avstånd minst 2

En partikel startar på talet 0 och hoppar ett steg varje sekund, med steglängd 1 i negativ eller positiv riktning med sannolikheten 0,5 vardera. Hoppen är oberoende. Vad är sannolikheten att partikeln vid tiden 8 sekunder befinner sig på ett avstånd från 0 som är **större än eller lika med 2**? Ange ditt svar i procent med en decimal.

Kommentar: Med avståndet menas absolutbeloppet av positionen.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Räkna antalet steg åt höger: Binomialfördelning.

Ledtråd 2

Med $\eta \in \text{Bin}(8; 0,5)$ steg åt höger är positionen $2\eta - 8$, alltid ett jämnt tal.

Ledtråd 3

Positionen är jämn, så avståndet är minst 2 precis när partikeln *inte* står på 0.

Lösning

$$|2\eta - 8| \geq 2 \iff \eta \neq 4, \text{ så}$$

$$P = 1 - P(\eta = 4) = 1 - \frac{\binom{8}{4}}{2^8} = 1 - \frac{70}{256} \approx \boxed{72,7 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

4. En standardavvikelse kring väntevärdet i $R(0, 1)$

I $N(0, 1)$ -fördelningen ligger ungefär 68 % av massan inom en standardavvikelse från väntevärdet: om $\xi \in N(0, 1)$ är $P(-1 \leq \xi \leq 1) = 0,6826$. Beräkna motsvarande sannolikhet för $R(0, 1)$ -fördelningen, det vill säga $P(\mu - \sigma \leq \xi \leq \mu + \sigma)$ om ξ är rektangelfördelad på $[0, 1]$, där $\mu = E(\xi)$ och $\sigma = \sqrt{V(\xi)}$. Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Rektangelfördelning: sannolikhet är längd.

 Ledtråd 2

$$\mu = 1/2 \text{ och } \sigma = 1/\sqrt{12}.$$

 Ledtråd 3

Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ligger helt i $[0, 1]$ och har längden 2σ .

 Lösning

$$P(\mu - \sigma \leq \xi \leq \mu + \sigma) = 2\sigma = \frac{2}{\sqrt{12}} \approx \boxed{57,7 \%}$$

Rektangelfördelningen har mindre massa nära mitten än normalfördelningen, så andelen blir lägre än 68 %.

Kontrollerat mot facit.

5. Nettovinst som linjär funktion av en Poissonvariabel

Thomas jobbar som inkastare på en bar på en grekisk ö. För varje person han lyckas få att gå in i baren får han 40 kr, och han har kostnader på 250 kr per dag. Lockar han till exempel 40 kunder en dag blir nettovinsten 1 350 kr. Antalet kunder per dag är Poissonfördelat med väntevärde 30. Vad är **standardavvikelsen** för nettovinsten på en dag? Svara med en decimal.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Linjär funktion: $\eta = 40\xi - 250$.

 Ledtråd 2

$\xi \in \text{Po}(30)$ har $V(\xi) = 30$.

 Ledtråd 3

$$D(a\xi + b) = |a| D(\xi).$$

 Lösning

$$D(\eta) = 40\sqrt{30} \approx \boxed{219,1 \text{ kr}}$$

Kontrollerat mot facit.

6. Summa av 40 exponentialfördelade variabler

De stokastiska variablerna $\xi_1, \dots, \xi_{40}$ är oberoende och har samma kontinuerliga fördelning med frekvensfunktionen $f(x) = 0,6e^{-0,6x}, x > 0$. Låt ξ vara summan av de 40 variablerna. Beräkna $P(\xi > 78)$. Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

En summa av många oberoende variabler: **Centrala gränsvärdessatsen**.

 Ledtråd 2

f är [[Exponentialfördelning|Exp(0,6)]], så $\mu = \sigma = 1/0,6$.

 Ledtråd 3

$$\xi \approx N(40\mu; \sqrt{40}\sigma) = N(66,67; 10,54).$$

 Lösning

Se uppgift 14 för den fullständiga lösningen. Kortfattat:

$$P(\xi > 78) \approx 1 - \Phi\left(\frac{78 - 66,67}{10,54}\right) = 1 - \Phi(1,075) \approx \boxed{14,11 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

7. Spjutkast: vem kastar längst?

Anna kastar i genomsnitt 55,9 m och Stina 50,7 m. Avvikelseerna från genomsnittet är normalfördelade med väntevärde 0 och standardavvikelse 3 (Anna) respektive 5,2 (Stina). Om Anna och Stina gör var sitt kast, vad är sannolikheten att Stinas kast blir längre än Annas? Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Skriv händelsen som en skillnad: $\xi_S - \xi_A > 0$ (Summor av normalfördelade stokastiska variabler).

 Ledtråd 2

Kasten är oberoende, så $\xi_S - \xi_A \in N(50,7 - 55,9; \sqrt{5,2^2 + 3^2})$.

 Ledtråd 3

Standardavvikelsen är $\sqrt{36,04} = 6,003$. Standardisera 0.

 Lösning

$$\xi_S - \xi_A \in N(-5,2; 6,003), \quad P(\xi_S - \xi_A > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{5,2}{6,003}\right) = 1 - \Phi(0,866) \approx \boxed{19,32 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

8. Kortare tillverkningstid: kritisk gräns i ett z-test

En ny tillverkningsmetod ska provas; du tror att den ger kortare genomsnittstid än de 124 sekunder som gällt hittills. Du gör 35 mätningar och bestämmer att det ska vara 2,5 % risk att påstå att den nya metoden ger kortare tid trots att den inte är bättre. Tillverkningstiden är normalfördelad med standardavvikelsen $\sigma = 9$ sekunder. Testvariabeln är

$$z = \frac{\bar{x} - 124}{\sigma/\sqrt{n}}$$

och den jämförs med en viss konstant. Vilket värde har konstanten? Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

[[Sammansatta hypoteser|Test med känd σ]: $z \in N(0, 1)$ när H_0 är sann.

 Ledtråd 2

$H_0 : \mu = 124$ mot $H_1 : \mu < 124$. Små z talar för H_1 .

 Ledtråd 3

Förkasta om $z < -\lambda_{0,025}$.

 Lösning

Signifikansnivån 2,5 % med vänstersidig mothypotes ger

$$\text{förkasta } H_0 \text{ om } z < -\lambda_{0,025} = \boxed{-1,96}$$

Kontrollerat mot facit.

9. Konfidensintervall för två stickprov

Följande är ett observerat stickprov från $N(a, \sigma_1)$ (a och σ_1 okända):

6,9	5,2	6,8	5,1	6	5,1	6,4
-----	-----	-----	-----	---	-----	-----

Följande är ett observerat stickprov från $N(b, \sigma_2)$ (b och σ_2 okända):

3	3,6	4,4	4	4,7	5,9	3,2
---	-----	-----	---	-----	-----	-----

Stickproven är oberoende och $\sigma_1 = \sigma_2$. Beräkna ett 90 % konfidensintervall för $a - b$. Svara med den **nedre** gränsen med tre decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Olika objekt i grupperna och samma σ : **Två stickprov**.

 Ledtråd 2

Väg ihop varianserna: $s^2 = ((n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2)/(n_1 + n_2 - 2)$.

 Ledtråd 3

$$\bar{x} - \bar{y} \mp t_{0,05}(12) s \sqrt{1/7 + 1/7} \text{ med } t_{0,05}(12) = 1,782.$$

 Lösning

$\bar{x} = 5,929$, $\bar{y} = 4,114$, $s_x = 0,799$ och $s_y = 0,997$. Med lika stora stickprov är

$$s = \sqrt{\frac{s_x^2 + s_y^2}{2}} = 0,904$$

$$\bar{x} - \bar{y} - t_{0,05}(12) s \sqrt{\frac{2}{7}} = 1,814 - 1,782 \cdot 0,904 \cdot 0,5345 \approx \boxed{0,953}$$

På räknaren. 2-Sample t Interval med C Level 0,9 och **Pooled: Yes**.

Kontrollerat mot facit.

10. Nio forskare: felaktigt accepterad nollhypotes

I en forskargrupp med 9 personer vill man testa H_0 mot en enkel mothypotes H_1 . Var och en använder ett test med signifikansnivå 0,1 och styrka 0,89. Testen baseras på stickprov av storlek 20, och de 9 stickproven är oberoende. Antag att H_0 är **falsk**. Beräkna sannolikheten att minst 3 av de 9 forskarna felaktigt drar slutsatsen att H_0 ska accepteras. Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Varje forskare är ett oberoende försök (**Binomialfördelning**). Vilken sannolikhet gäller när H_0 är falsk?

 Ledtråd 2

När H_0 är falsk accepteras den med sannolikheten $1 - \text{styrkan} = 0,11$ (**Signifikansnivå och styrka**).

 Ledtråd 3

$\xi \in \text{Bin}(9; 0,11)$ och $P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi \leq 2)$.

 Lösning

$$P(\xi \geq 3) = 1 - \sum_{k=0}^2 \binom{9}{k} 0,11^k 0,89^{9-k} \approx \boxed{6,72 \%}$$

På räknaren. `1-binomCdf(9,0.11,2)`.

Kontrollerat mot facit.

11. Längdskillnad mellan far och son

Korrelationen mellan fäders och vuxna söners längd har visat sig vara kring 0,5. Antag att man slumpmässigt väljer ett far-son-par från en population där korrelationen är 0,45, och att längden är normalfördelad med väntevärde 178 cm och standardavvikelse 8 cm. Vad är sannolikheten att skillnaden i längd mellan far och son är **mer än** 10 cm? Ange ditt svar i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Skillnaden i en tvådimensionell normalfördelning är normalfördelad.

 Ledtråd 2

$$E(\xi_F - \xi_S) = 0 \text{ och } V(\xi_F - \xi_S) = 2\sigma^2(1 - \rho).$$

 Ledtråd 3

“Mer än 10 cm” gäller åt båda håll: $P(|D| > 10) = 2(1 - \Phi(10/D(D)))$.

 Lösning

$$D(\xi_F - \xi_S) = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 0,45 \cdot 8 \cdot 8} = 8\sqrt{1,1} = 8,390$$

$$P(|\xi_F - \xi_S| > 10) = 2(1 - \Phi(\frac{10}{8,390})) = 2(1 - \Phi(1,192)) \approx \boxed{23,3 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

12. Kovarians i ett signalsystem

För att modellera ett signalsystem används beroende slumpvariabler $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ där

$$\xi_t = \sum_{i=1}^t (a_i \eta_i + b_i)$$

$a_1, a_2, \dots$ och $b_1, b_2, \dots$ är konstanter och $\eta_1, \eta_2, \dots$ är oberoende $N(0, 1)$ -fördelade. Antag att $a_1 = 3, a_2 = 1$ och $b_1 = 1, b_2 = 0$. Beräkna **kovariansen** mellan ξ_1 och ξ_2 . Svara med en decimal.

Totalpoäng: 3

 Ledtråd 1

Skriv ut ξ_1 och ξ_2 och använd att **kovariansen** är linjär i båda argumenten.

 Ledtråd 2

$$\xi_1 = 3\eta_1 + 1 \text{ och } \xi_2 = 3\eta_1 + 1 + \eta_2.$$

 Ledtråd 3

Konstanter påverkar inte kovariansen, och $\text{Cov}(\eta_1, \eta_2) = 0$.

 Lösning

$$\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \text{Cov}(3\eta_1, 3\eta_1 + \eta_2) = 9V(\eta_1) + 3\text{Cov}(\eta_1, \eta_2) = 9 + 0 = \boxed{9,0}$$

Kontrollerat mot facit.

13. Del 2: standardavvikelsen ur en sannolikhet

Antag att man slumpmässigt väljer ett far–son-par från en population som liknar den i uppgift 11, men där väntevärde och standardavvikelse skiljer sig från uppgift 11. Antag att sannolikheten att skillnaden i längd mellan ett slumpmässigt valt far–son-par är mer än 10 cm är lika med 0,1. Vad är då standardavvikelsen i populationen?

Totalpoäng: 10

 Ledtråd 1

Samma modell som i uppgift 11, men nu är sannolikheten given och σ okänd (Standardiserad normalfördelning).

 Ledtråd 2

$$D = \xi_F - \xi_S \in N(0; \sigma\sqrt{2(1-\rho)}) \text{ med } \rho = 0,45, \text{ alltså } D(D) = \sigma\sqrt{1,1}.$$

 Ledtråd 3

$$P(|D| > 10) = 0,1 \text{ ger } 10/(\sigma\sqrt{1,1}) = \lambda_{0,05}.$$

 Lösning

Modell. (ξ_F, ξ_S) är tvådimensionellt normalfördelat med samma väntevärde μ och standardavvikelse σ för båda, och korrelation $\rho = 0,45$ som i uppgift 11.

Skillnadens fördelning.

$$D = \xi_F - \xi_S \in N(0; \sigma\sqrt{2 - 2 \cdot 0,45}) = N(0; \sigma\sqrt{1,1})$$

Väntevärdet μ tar ut sig, så det behövs inte.

Villkoret.

$$P(|D| > 10) = 2(1 - \Phi(\frac{10}{\sigma\sqrt{1,1}})) = 0,1 \iff \frac{10}{\sigma\sqrt{1,1}} = \lambda_{0,05} = 1,6449$$

$$\sigma = \frac{10}{1,6449 \cdot \sqrt{1,1}} \approx \boxed{5,80 \text{ cm}}$$

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

14. Del 2: fullständig lösning av uppgift 6

Skriv en fullständig lösning till uppgift 6: $\xi_1, \dots, \xi_{40}$ är oberoende med frekvensfunktionen $f(x) = 0,6e^{-0,6x}$, $x > 0$. Låt ξ vara summan. Beräkna $P(\xi > 78)$.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Känn igen fördelningen, räkna μ och σ för en term, använd sedan **Centrala gränsvärdessatsen**.

Ledtråd 2

[[Exponentialfördelning|Exp(λ)]] har $E = 1/\lambda$ och $D = 1/\lambda$.

Ledtråd 3

Motivera varför CGS får användas: $n = 40$ oberoende, likafördelade termer med ändlig varians.

 Lösning

Modell. $\xi_i \in \text{Exp}(0,6)$ oberoende, $i = 1, \dots, 40$, och $\xi = \sum \xi_i$.

En term. $E(\xi_i) = 1/0,6 = 1,667$ och $D(\xi_i) = 1/0,6 = 1,667$.

Summan. $E(\xi) = 40 \cdot 1,667 = 66,67$ och $D(\xi) = \sqrt{40} \cdot 1,667 = 10,54$ (Linjära funktioner av stokastiska variabler).

CGS. Termerna är oberoende och likafördelade med ändlig varians och $n = 40$ är stort, så $\xi \approx N(66,67; 10,54)$:

$$P(\xi > 78) \approx 1 - \Phi\left(\frac{78 - 66,67}{10,54}\right) = 1 - \Phi(1,075) \approx \boxed{0,141}$$

(Summan är exakt gammafördelad, och det exakta värdet är 0,142, så approximationen är god.)

Kontrollerat mot facit (uppgift 6).

15. Del 2: har novembermånaderna blivit varmare?

Den 2 december 2015 rapporterade SVT:s Aktuellt att november det året var varmare än vad november i genomsnitt varit i Sverige under lång tid. I själva verket hade november under 9 av de 10 senaste åren varit varmare än genomsnittet; undantaget var det ovanligt kalla 2010.

Man skulle, baserat på denna information, kunna genomföra ett mycket enkelt test av om en förändring verkligen skett de senaste 10 åren. Genomför ett sådant test. Hypoteser, beslutsregel, slutsats och risknivå ska tydligt framgå.

Totalpoäng: 10

 Ledtråd 1

Bara “varmare eller kallare än genomsnittet” är känt: ett teckentest med Binomialfördelning.

Ledtråd 2

Utan förändring är varje år varmare med sannolikheten 0,5, oberoende av andra år: $\xi \in \text{Bin}(10; 0,5)$.

Ledtråd 3

Direktmetoden: $\alpha_0 = P(\xi \geq 9 \mid p = 0,5)$.

Lösning

Modell. ξ = antal av de 10 senaste åren då november var varmare än det långsiktiga genomsnittet. Åren antas oberoende och varje år är varmare med sannolikheten p , så $\xi \in \text{Bin}(10; p)$.

Hypoteser. $H_0 : p = 0,5$ (ingen förändring) mot $H_1 : p > 0,5$ (novembermånaderna har blivit varmare).

Beslutsregel. Stora värden på ξ talar för H_1 . Förkasta H_0 på nivån α om $\alpha_0 = P(\xi \geq x_{\text{obs}} \mid p = 0,5) < \alpha$.

Räkning. Med $x_{\text{obs}} = 9$:

$$\alpha_0 = P(\xi \geq 9) = \frac{\binom{10}{9} + \binom{10}{10}}{2^{10}} = \frac{11}{1024} \approx 0,0107$$

Slutsats. $\alpha_0 < 0,05$, så H_0 förkastas på 5 %-nivån: novembermånaderna har blivit varmare. På 1 %-nivån kan H_0 däremot inte förkastas, eftersom $0,0107 > 0,01$.

Förbehåll. Testet kräver att åren är oberoende och att "genomsnittet" inte räknats på de år som testas.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Se även

- [S0008M](#)
 - [Oberoende händelser](#)
 - [Bayes sats](#)
 - [Binomialfördelning](#)
 - [Likformig fördelning](#)
 - [Centrala gränsvärdessatsen](#)
 - [Två stickprov](#)
 - [Tvådimensionell normalfördelning](#)
 - [Kovarians](#)
 - [Direktmetoden](#)
-