

S0008M-2025-06-03

19 okt. 2026, 15 min läsning

UTKAST

#tenta #sannolikhetslära #statistik

Kurs: S0008M — Sannolikhetslära och statistik **Datum:** 2025-06-03 **Källa:** originaltentamen ·
lärarens lösningar (saknar uppgift 14)

Översikt

Del 1 (uppgift 1–12, bara svar):

- minst en dubbelsexa (1), Bayes sats för ett tjuvlarm (2) och binomialfördelning för en kabel (3)
- CGS för vinst (4) och väntevärdet av rörelseenergi (5)
- μ och σ ur två svansar (6) och exponentialfördelning med given median (7)
- teckenintervall (8), stickprov i par (9) och styrka för ett test av μ (10)
- betingat väntevärde ur en tabell (11) och mötesproblemet (12)

Del 2 (uppgift 13–15):

- väntevärdet av antalet inträffade händelser (13)
- test av varma novembermånader (14)
- förväntat avstånd i gatunät på en cirkelskiva (15)

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit. Facit saknar uppgift 14; den är löst två gånger oberoende av varandra.

1. Minst en dubbelsexa

Två tärningar kastas om och om igen. Bestäm det minsta antalet kast av de två tärningarna som måste göras för att sannolikheten att få minst en dubbelsexa ska bli minst lika med 0,8. Svara med ett **heltal**.

Förtydligande: Att ett kast görs betyder alltså att båda tärningarna kastas.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

“Minst en” räknas enklast via komplementet: inga dubbelsexor alls (**Oberoende händelser**).

Ledtråd 2

$P(\text{dubbelsexa i ett kast}) = 1/36$, så $P(\text{minst en på } n \text{ kast}) = 1 - (35/36)^n$.

Ledtråd 3

Lös $(35/36)^n \leq 0,2$ med logaritmer. Tänk på att $\ln(35/36) < 0$ vänder olikheten.

Lösning

Kasten är oberoende, så

$$P(\text{minst en dubbelsexa}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq 0,8 \iff \left(\frac{35}{36}\right)^n \leq 0,2$$

$$n \geq \frac{\ln 0,2}{\ln(35/36)} \approx 57,13$$

Minsta heltal är 58. Kontroll: $n = 57$ ger 0,7993 och $n = 58$ ger 0,8048.

Kontrollerat mot facit.

2. Falskt larm

Om ett inbrott görs en natt, ringer Annas tjuvlarm med sannolikheten 0,99. Om inget inbrott görs, ringer larmet med sannolikheten 0,02. Antag att sannolikheten är 0,001 att ett inbrott inträffar under en viss natt.

En natt väcks Anna av tjuvlarmet. Vad är sannolikheten att det var falskt larm? Dvs, vad är sannolikheten att inget inbrott har skett? Ange ditt svar i **procent** med **två decimaler**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Man vet utfallet (larmet går) och frågar efter orsaken: **Bayes sats**.

Ledtråd 2

Låt I = inbrott och L = larm. $P(L)$ fås med **lagen om total sannolikhet**.

Ledtråd 3

$$P(I^* \mid L) = \frac{P(L \mid I^*)P(I^*)}{P(L)}, \text{ där } I^* \text{ är komplementet till } I.$$

Lösning

$$P(L) = P(L \mid I)P(I) + P(L \mid I^*)P(I^*) = 0,99 \cdot 0,001 + 0,02 \cdot 0,999 = 0,02097$$

$$P(I^* \mid L) = \frac{0,02 \cdot 0,999}{0,02097} = 1 - \frac{0,00099}{0,02097} \approx \boxed{95,28 \%}$$

Trots att larmet är bra är de flesta larm falska, eftersom inbrott är så ovanliga.

Kontrollerat mot facit.

3. Kabel av 200 trådar

En kabel består av 200 stycken 1 km långa ståltrådar. Sannolikheten att en tråd är defekt är lika med 0,02. För att kabeln ska kunna bära angiven last måste **minst 195** av de 200 trådarna i kabeln vara felfria.

Vad är sannolikheten att kabeln kan bära angiven last? Ange ditt svar i **procent** med **en decimal**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Räkna antalet defekta trådar: **Binomialfördelning**.

Ledtråd 2

ξ = antal defekta, $\xi \in \text{Bin}(200; 0,02)$.

Ledtråd 3

Minst 195 felfria är samma sak som högst 5 defekta: $P(\xi \leq 5)$.

Lösning

$$P(\xi \leq 5) = \sum_{k=0}^5 \binom{200}{k} 0,02^k 0,98^{200-k} \approx \boxed{78,7 \%}$$

Med **Poissonapproximation**, $\text{Po}(4)$, blir svaret 78,5 %.

På räknaren. `binomCdf(200,0.02,5)`.

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit anger både det exakta värdet 78,67 % och Poissonapproximationen 78,51 %.

4. Vinst på 100 trådar

Vinsten då man säljer en viss typ av metalltråd är slumpmässig. Vinsten blir 0 kr med sannolikhet 0,3, 10 kr med sannolikhet 0,6, och 20 kr med sannolikhet 0,1.

Om man säljer 100 trådar, vad är då sannolikheten att vinsten blir större än 900 kr? Svara i **procent** med **två decimaler**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

En summa av 100 oberoende vinster: **Centrala gränsvärdessatsen**.

Ledtråd 2

Beräkna $\mu = E(\xi_i)$ och $\sigma = D(\xi_i)$ för en tråd (**Väntevärde**, **Varians** och **standardavvikelse**).

Ledtråd 3

$\mu = 8$ och $\sigma = 6$, så summan är ungefär $N(800, 60)$.

Lösning

För en tråd:

$$\mu = 0 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,6 + 20 \cdot 0,1 = 8, \quad \sigma^2 = 64 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 + 144 \cdot 0,1 = 36$$

Enligt CGS är $\sum_{i=1}^{100} \xi_i$ approximativt $N(100 \cdot 8, \sqrt{100} \cdot 6) = N(800, 60)$:

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} \xi_i > 900\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{900 - 800}{60}\right) = 1 - \Phi(1,667) \approx \boxed{4,78 \%}$$

På räknaren. `normCdf(900, ∞, 800, 60)`.

Kontrollerat mot facit.

5. Rörelseenergi för en mol gas

Hastigheten i x-led (enhet: m/s) för en partikel i viss gas har en normalfördelning med väntevärde 0 och standardavvikelse 3. Partikelns rörelseenergi i x-led är halva massan gånger hastigheten i kvadrat.

En viss gas består av partiklar vars massa (enhet: kg) är $6,52 \cdot 10^{-23}$. Vad är **väntevärdet** av den totala rörelseenergin i x-led för **en mol** av denna gas? Ange ditt svar med **en decimal**.

Kommentar: $1 \text{ mol} = 6,02214076 \cdot 10^{23}$.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Rörelseenergin $\eta = m\xi^2/2$ är linjär i ξ^2 : [Linjära funktioner av stokastiska variabler](#).

Ledtråd 2

$E(\eta) = \frac{m}{2}E(\xi^2)$. Hur hänger $E(\xi^2)$ ihop med variansen?

Ledtråd 3

$E(\xi^2) = V(\xi) + E(\xi)^2 = 9 + 0 = 9$. Multiplicera sedan med antalet partiklar.

Lösning

Med $\xi \in N(0, 3)$ är $E(\xi^2) = V(\xi) + (E\xi)^2 = 9$. För en partikel:

$$E(\eta) = \frac{m}{2}E(\xi^2) = \frac{6,52 \cdot 10^{-23} \cdot 9}{2}$$

Väntevärdet av en summa är summan av väntevärdena, så för en mol:

$$6,02214076 \cdot 10^{23} \cdot \frac{6,52 \cdot 10^{-23} \cdot 9}{2} \approx \boxed{176,7 \text{ J}}$$

Kontrollerat mot facit.

6. Axeldiameter ur två svansar

Diametern för axlar som tillverkas kan betraktas som en stokastisk variabel ξ . Vid kvalitetskontroll sorterar man bort de axlar som är tjockare än 1,07 mm eller smalare än 0,92 mm. Man har funnit att $P(\xi > 1,07) = 0,06$ och $P(\xi < 0,92) = 0,02$. Antag att $\xi \in N(\mu, \sigma)$. Bestäm μ och σ och ange värdet på σ . Svara med **tre decimaler**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Standardisera båda villkoren (Standardiserad normalfördelning, Median och kvantiler).

Ledtråd 2

$$\frac{1,07 - \mu}{\sigma} = \lambda_{0,06} \text{ och } \frac{0,92 - \mu}{\sigma} = -\lambda_{0,02}.$$

Ledtråd 3

Subtrahera ekvationerna så att μ försvinner: $0,15 = (\lambda_{0,06} + \lambda_{0,02}) \sigma$.

Lösning

$$1,07 = \mu + \lambda_{0,06} \sigma = \mu + 1,5548 \sigma, \quad 0,92 = \mu - \lambda_{0,02} \sigma = \mu - 2,0537 \sigma$$

Subtraktion ger

$$\sigma = \frac{1,07 - 0,92}{1,5548 + 2,0537} = \frac{0,15}{3,6085} \approx \boxed{0,042}$$

och $\mu = 1,07 - 1,5548 \cdot 0,0416 \approx 1,005$ mm.

På räknaren. `invNorm(0.94)` och `invNorm(0.98)`.

Kontrollerat mot facit.

7. Exponentialfördelning med median 1

Antag att ξ har en exponentialfördelning där **medianen** är lika med 1. Låt $\eta = \xi + 3$. Beräkna sannolikheten $P(\eta \leq 5)$. Svara i **procent** med **en decimal**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Exponentialfördelning: bestäm λ ur medianen (Median och kvantiler).

Ledtråd 2

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Medianen ger $1 - e^{-\lambda} = 0,5$.

Ledtråd 3

$\lambda = \ln 2$, och $\eta \leq 5 \iff \xi \leq 2$.

Lösning

$1 - e^{-\lambda} = 0,5$ ger $\lambda = \ln 2$. Sedan

$$P(\eta \leq 5) = P(\xi \leq 2) = 1 - e^{-2 \ln 2} = 1 - 0,5^2 = \boxed{75,0 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

8. Teckenintervall nära 96 %

Följande är observationer från en fördelning som **inte** är en normalfördelning.

5,24 0,53 8,54 13,96 11,85 4,5 16,85

Man vill bestämma ett konfidensintervall för **medianen** i fördelningen som har en konfidensgrad som ligger så nära 96 % som möjligt. Finn ett sådant intervall och ange dess **nedre gräns** med **två decimaler**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Ingen normalfördelning, median: **Teckenintervall**.

Ledtråd 2

Intervall $[x_{(k+1)}, x_{(n-k)}]$ har konfidensgraden $1 - 2P(\eta \leq k)$ med $\eta \in \text{Bin}(9; 0,5)$.

Ledtråd 3

Pröva $k = 0, 1, 2$ och välj den konfidensgrad som ligger närmast 96 %. Sortera sedan datan.

Lösning

Med $\eta \in \text{Bin}(9; 0,5)$:

k	intervall	$1 - 2P(\eta \leq k)$
0	$[x_{(1)}, x_{(9)}]$	99,61 %
1	$[x_{(2)}, x_{(8)}]$	96,09 %
2	$[x_{(3)}, x_{(7)}]$	82,03 %

Närmast 96 % är $[x_{(2)}, x_{(8)}]$. Det ordnade stickprovet är

0,53; 4,5; 5,24; 8,54; 11,85; 13,66; 13,96; 15,04; 16,85

så intervallet blir $[4,50; 15,04]$ och den nedre gränsen är 4,50.

På räknaren. `1-2*binomCdf(9,0.5,1)`.

Kontrollerat mot facit.

9. Två vågar och samma klot

Anders har två vågar, våg A och våg B. Han misstänker att vågarna i genomsnitt visar olika vikt. För att försöka avgöra om så är fallet tar han sju av sina bouleklott och väger sedan vart och ett av kloten en gång på varje våg. Resultatet (i gram) visas nedan.

A	711,9	688	683,1	695,7	680,4	702,1
B	711,4	687,7	682,9	695,2	680	702

Beräkna ett 95 % konfidensintervall för den genomsnittliga skillnaden mellan våg A och våg B (definierad som $A - B$) under lämpliga normalfördelningsantaganden. Som svar ska du ange den **nedre gränsen**. Använd **tre decimaler**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Samma klot vägs på båda vågarna: **Stickprov i par**.

Ledtråd 2

Bilda differenserna $z_i = x_i - y_i$ och gör ett t -intervall för deras väntevärde med 6 frihetsgrader (**t -fördelningen**).

 Ledtråd 3

$$I = \bar{z} \pm t_{0,025}(6) \cdot s_z / \sqrt{7}.$$

 Lösning

Differenserna A – B är

0,5; 0,3; 0,2; 0,5; 0,4; 0,1; 0,2

med $\bar{z} = 0,31429$ och $s_z = 0,15736$. Med $t_{0,025}(6) = 2,4469$:

$$I = \bar{z} \pm t_{0,025}(6) \cdot \frac{s_z}{\sqrt{7}} = 0,31429 \pm 2,4469 \cdot \frac{0,15736}{\sqrt{7}} = 0,31429 \pm 0,14554$$

Intervallet är [0,169; 0,460] och den nedre gränsen är 0,169. Intervallet innehåller inte 0, så vågarna tycks visa olika.

På räknaren. Mata in differenserna i en lista och använd `tInterval` (eller `invT(0.975,6)` för kvantilen).

Kontrollerat mot facit.

10. Styrka för ett test av μ

Antag att $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5$ är ett stickprov av storlek 5 från en $N(\mu, 0,3)$ -fördelning och att man vill testa

$$H_0 : \mu = 0,5 \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu = 0$$

Bestäm ett lämpligt test med 1 % **signifikansnivå**. Beräkna sedan testets **styrka**. Som svar ska du ange styrkan i **procent** med **två decimaler**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Enkla hypoteser: mothypotesen ligger till vänster, så små $\bar{\xi}$ talar mot H_0 (Signifikansnivå och styrka).

Ledtråd 2

Förkasta H_0 om $\bar{\xi} < k$. Här är $\bar{\xi} \in N(\mu, 0,3/\sqrt{5})$ (Medelvärkets fördelning).

Ledtråd 3

$k = 0,5 - \lambda_{0,01} \cdot 0,3/\sqrt{5}$. Styrkan är $P(\bar{\xi} < k \mid \mu = 0)$.

Lösning

Test. Förkasta H_0 om $\bar{\xi} < k$. Med $D(\bar{\xi}) = 0,3/\sqrt{5} = 0,13416$ ger signifikansnivån

$$P(\bar{\xi} < k \mid \mu = 0,5) = \Phi\left(\frac{k - 0,5}{0,13416}\right) = 0,01 \iff k = 0,5 - 2,3263 \cdot 0,13416 = 0,18789$$

Styrka.

$$P(\bar{\xi} < 0,18789 \mid \mu = 0) = \Phi\left(\frac{0,18789}{0,13416}\right) = \Phi(1,4004) \approx \boxed{91,93 \%}$$

På räknaren. `invNorm(0.01,0.5,0.3/√(5))` ger k , sedan `normCdf(-∞,k,0,0.3/√(5))`.

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit anger 0,92; där används $\lambda_{0,01} = 2,3216$ i stället för 2,3263, vilket ger $k = 0,18852$ och styrkan 92,00 %. Med rätt kvantil blir styrkan 91,93 %.

11. Majas betyg givet Joels

Joel och Maja har pluggat till en tenta som de skall skriva för överbetyg. Sannolikhetsfördelningen för betygen (3, 4 eller 5) ges nedan. Om Joel skriver tentan först och meddelar Maja att han fick en fyra, vad är då väntevärdet av Majas betyg? Svara med **två decimaler**.

Joel \ Maja	3	4	5
3	0,24	0,11	0,04
4	0,02	0,29	0,13
5	0,01	0,03	0,13

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Betingad fördelning och betingat väntevärde för en diskret tvådimensionell fördelning.

Ledtråd 2

Givet att Joel fick 4 gäller bara raden för 4. Normera den så att summan blir 1.

Ledtråd 3

Radsumman är 0,44, så de betingade sannolikheterna är 0,02/0,44, 0,29/0,44 och 0,13/0,44.

Lösning

Låt ξ = Joels betyg och η = Majas. $P(\xi = 4) = 0,02 + 0,29 + 0,13 = 0,44$, så

$$E(\eta \mid \xi = 4) = \frac{3 \cdot 0,02 + 4 \cdot 0,29 + 5 \cdot 0,13}{0,44} = \frac{1,87}{0,44} = \boxed{4,25}$$

Kontrollerat mot facit.

12. Möte på fiket

Två personer bestämmer möte på ett fik “någon gång mellan tolv och ett”.

Om de var och en anländer vid slumpmässigt valda tider under timmen och väntar 10 minuter på varandra (eller tills klockan är ett), vad är då sannolikheten att de träffas? Svara i **procent** med **en decimal**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Två oberoende **likformiga** ankomsttider ger en likformig fördelning på en kvadrat (Flerdimensionella fördelningar).

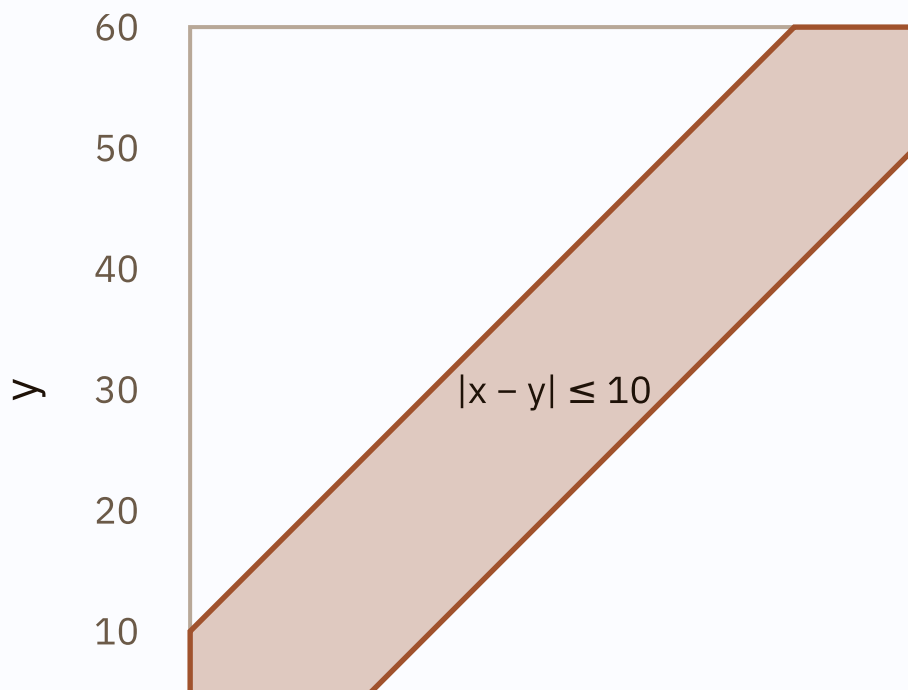
Ledtråd 2

$\xi, \eta \in R(0, 60)$ oberoende. De träffas om $|\xi - \eta| \leq 10$. Sannolikheten är en andel av kvadratens area.

Ledtråd 3

Området där de *inte* träffas är två trianglar med kateterna 50.

 Lösning



(ξ, η) är likformigt fördelad på $[0, 60] \times [0, 60]$. De träffas om $|\xi - \eta| \leq 10$, alltså utom i två hörntrianglar med kateterna 50:

$$P(|\xi - \eta| \leq 10) = \frac{60^2 - 2 \cdot 50^2/2}{60^2} = \frac{1100}{3600} \approx \boxed{30,6 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

13. Del 2: antal händelser som inträffar

Händelserna A, B, C, D är oberoende, där $P(A) = 0,3, P(B) = 0,5, P(C) = 0,8, P(D) = 0,7$.

Låt slumpvariabeln ξ stå för antalet händelser av de fyra händelserna, som inträffar. De möjliga värdena på ξ är alltså heltalen 0, 1, 2, 3, 4.

Beräkna väntevärdet av ξ .

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Du behöver inte fördelningen för ξ . Skriv ξ som en summa (Väntevärde).

Ledtråd 2

Låt $\xi_A = 1$ om A inträffar och 0 annars, och likadant för B, C, D . Då är $\xi = \xi_A + \xi_B + \xi_C + \xi_D$.

Ledtråd 3

$E(\xi_A) = P(A)$, och väntevärdet av en summa är summan av väntevärdena (Linjära funktioner av stokastiska variabler).

Lösning

Modell. Låt $\xi_A = 1$ om A inträffar och $\xi_A = 0$ annars. Definiera ξ_B, ξ_C, ξ_D på samma sätt. Då är

$$\xi = \xi_A + \xi_B + \xi_C + \xi_D$$

Väntevärde för en indikator.

$$E(\xi_A) = 0 \cdot P(A^*) + 1 \cdot P(A) = P(A) = 0,3$$

och på samma sätt $E(\xi_B) = 0,5, E(\xi_C) = 0,8, E(\xi_D) = 0,7$.

Summan. Väntevärdet av en summa är summan av väntevärdena:

$$E(\xi) = 0,3 + 0,5 + 0,8 + 0,7 = \boxed{2,3}$$

Oberoendet behövs inte för väntevärdet, bara om man vill ta fram hela fördelningen för ξ , vilket ger betydligt längre räkningar.

Kontrollerat mot facit.

14. Del 2: varma novembermånader

Den 2 december 2015 rapporterades i SVT:s Aktuellt att november månad det året var varmare än vad november månad i genomsnitt varit i Sverige under lång tid. I själva verket har november månad, under 9 av de 10 senaste åren, varit varmare än genomsnittet sett över lång tid. Undantaget var det ovanligt kalla 2010.

Man skulle, baserat på ovanstående information, kunna genomföra ett mycket enkelt test av huruvida en förändring verkligen skett de senaste 10 åren. Din uppgift är att genomföra ett sådant test. Hypoteser, beslutsregel, slutsats och risknivå skall tydligt framgå.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Man vet bara om varje år var varmare eller kallare än genomsnittet. Det är ett teckentest: räkna antalet "varmare" (**Hypotesprövning**).

Ledtråd 2

Om inget har förändrats är varje år varmare med sannolikheten 0,5, oberoende av andra år: $\xi \in \text{Bin}(10; 0,5)$ (**Binomialfördelning**).

Ledtråd 3

Ensidigt test, $H_1 : p > 0,5$. Beräkna $P(\xi \geq 9 \mid p = 0,5)$ och jämför med $P(\xi \geq 8 \mid p = 0,5)$ för att hitta beslutsregeln.

 Lösning

Modell. Låt ξ = antal av de 10 senaste åren då november var varmare än det långsiktiga genomsnittet. Åren antas oberoende och varje år är varmare med sannolikheten p , så $\xi \in \text{Bin}(10; p)$. Om klimatet inte har förändrats är det lika troligt att en november hamnar över som under genomsnittet, så $p = 0,5$.

Hypoteser. $H_0 : p = 0,5$ (ingen förändring) mot $H_1 : p > 0,5$ (november har blivit varmare). Mothypotesen är **sammansatt** och ensidig: stora värden på ξ talar mot H_0 .

Beslutsregel. Välj signifikansnivån 5 %. Under H_0 är

$$P(\xi \geq 9) = \frac{\binom{10}{9} + \binom{10}{10}}{2^{10}} = \frac{11}{1024} \approx 1,07 \%, \quad P(\xi \geq 8) = \frac{56}{1024} \approx 5,47 \%$$

Den största kritiska regionen med felrisk högst 5 % är alltså "förkasta H_0 om $\xi \geq 9$ ". Testets verkliga signifikansnivå (risknivå) är 1,07 %.

Räkning. Observerat värde: $x = 9$. Med **direktmetoden** blir

$$\alpha_0 = P(\xi \geq 9 \mid p = 0,5) = \frac{11}{1024} \approx 1,07 \%$$

Slutsats. $x = 9$ ligger i den kritiska regionen, så H_0 förkastas: november har blivit varmare de senaste 10 åren. Risker att dra den slutsatsen felaktigt är $\alpha_0 \approx 1,07 \%$, alltså mindre än 5 % men inte mindre än 1 %. Testet bygger på att åren är oberoende, vilket är en förenkling.

På räknaren. `1-binomCdf(10,0.5,8)`.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

15. Del 2: ambulans i ett rutnät av gator

Ett sjukhus ska placeras i ett mycket stort cirkulärt samhälle. Samhället representeras av cirkelskivan $D = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$, där $(x, y) = (0, 0)$ alltså motsvarar samhällets centrum. Gatusystemet är beskaffat så att man endast kan färdas i en riktning som är parallell med koordinataxlarna.

Antag att den slumpmässiga platsen för en olycka kan beskrivas med en likformig fördelning på D och att sjukhuset placeras i samhällets centrum. Vad är då **väntevärdet** av det avstånd som en ambulans behöver färdas vid utryckning?

Tips: Vad är marginalfördelningarna för x - respektive y -koordinat för platsen för en olycka?

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Ambulansen kör bara parallellt med axlarna, så avståndet är $|\xi| + |\eta|$, inte $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Använd **linjäritet** och **marginalfördelningarna**.

Ledtråd 2

Den likformiga tätheten på enhetsskivan är $f(x, y) = 1/\pi$. Integrera bort y : $f_\xi(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$ för $-1 < x < 1$.

Ledtråd 3

$E(|\xi|) = 2 \int_0^1 x \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx$. Substituera $u = 1 - x^2$. Symmetri ger $E(|\eta|) = E(|\xi|)$.

Lösning

Modell. Låt (ξ, η) vara olycksplatsen, likformigt fördelad på D med täthet $f(x, y) = 1/\pi$ (skivans area är π). Eftersom man bara kan köra parallellt med axlarna är sträckan $|\xi| + |\eta|$, och

$$E(|\xi| + |\eta|) = E(|\xi|) + E(|\eta|)$$

Marginalfördelning. För $-1 < x < 1$:

$$f_\xi(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$$

Räkning. f_ξ är symmetrisk kring 0, så

$$E(|\xi|) = 2 \int_0^1 x \cdot \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{4}{\pi} \left[-\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4}{3\pi}$$

Av symmetri är $E(|\eta|) = E(|\xi|)$.

Slutsats.

$$E(|\xi| + |\eta|) = 2 \cdot \frac{4}{3\pi} = \boxed{\frac{8}{3\pi} \approx 0,849}$$

i enheter av samhällets radie. Observera att ξ och η inte är oberoende, men det behövs inte eftersom väntevärdet av en summa alltid är summan av väntevärdena.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- S0008M
- Oberoende händelser
- Bayes sats
- Lagen om total sannolikhet
- Binomialfördelning
- Centrala gränsvärdessatsen
- Linjära funktioner av stokastiska variabler
- Median och kvantiler
- Exponentialfördelning
- Teckenintervall
- Stickprov i par
- Signifikansnivå och styrka
- Betingad fördelning och betingat väntevärde
- Flerdimensionella fördelningar
- Hypotesprövning
- Direktmetoden
- Marginalfördelning