

S0008M-2024-12-17

19 okt. 2026, 15 min läsning

UTKAST

#tenta #sannolikhetslära #statistik

Kurs: S0008M — Sannolikhetslära och statistik **Datum:** 2024-12-17 **Källa:** originaltentamen ·
lärarens lösningar

Översikt

Del 1 (uppgift 1–12, bara svar):

- exakt ett av två fel (1), Bayes sats för ett virustest (2) och dragning utan återläggning (3)
- CGS för en summa av Poissonvariabler (4) och standardavvikelsen för ett medelvärde (5)
- väntevärde ur en percentil i exponentialfördelningen (6) och slumpvandring (7)
- kritisk gräns för ett test med känd σ (8), konfidensintervall för stickprov i par (9) och teckentest (10)
- likformig fördelning på en kvadrat (11) och differensen i en tvådimensionell normalfördelning (12)

Del 2 (uppgift 13–15):

- korrelationen ur en given sannolikhet (13)
- percentil för maximum av två normalfördelade variabler (14)
- $E((\xi - c)^2)$ minimeras av $c = E(\xi)$ (15)

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Exakt ett av två fel

Vid tillverkning av en viss typ av byggelement kan två slags fel, fel a och fel b , uppkomma hos de tillverkade enheterna. Låt A stå för händelsen att fel a uppkommer och låt B stå för händelsen att fel b uppkommer. Man vet att $P(A) = 0,14$, $P(B) = 0,23$ och $P(A \cap B) = 0,07$. Beräkna sannolikheten att en tillverkad enhet har exakt ett av de två felen. Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Exakt ett är $A \cup B$ utom snittet.

Ledtråd 2

$$P(\text{exakt ett}) = P(A \cup B) - P(A \cap B).$$

Ledtråd 3

Med additionssatsen blir det $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Lösning

$$P(\text{exakt ett}) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,14 + 0,23 - 2 \cdot 0,07 = \boxed{23,0 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Frisk trots positivt virustest

Ett virus orsakar en pandemi. Man tar fram en metod för att testa om en person bär på viruset. Som med de flesta diagnosmetoder gäller att diagnosen inte alltid ger rätt resultat. Diagnosmetoden i fråga ger rätt resultat om en person inte bär på viruset med sannolikhet $0,81$, och rätt resultat om personen bär på viruset med sannolikhet $0,95$. Sannolikheten att en frisk person får diagnosen att den bär på viruset är alltså $0,19$, och sannolikheten att en person som bär på viruset får diagnosen att den inte bär på viruset är alltså $0,05$.

Vid ett visst tillfälle bär 5 % av invånarna i en stad på viruset. En slumpmässigt vald person testas och får diagnosen att den bär på viruset. Hur stor är sannolikheten för att personen i själva verket är frisk (dvs inte bär på viruset)? Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Man vet utfallet av testet och frågar efter orsaken: **Bayes sats**.

Ledtråd 2

Låt S = sjuk, F = frisk och D_S = positiv diagnos. $P(F \mid D_S) = \frac{P(D_S \mid F)P(F)}{P(D_S)}$.

Ledtråd 3

Nämnaren fås med **lagen om total sannolikhet**: $P(D_S) = P(D_S \mid S)P(S) + P(D_S \mid F)P(F)$.

Lösning

Givet: $P(S) = 0,05$, $P(F) = 0,95$, $P(D_S \mid S) = 0,95$ och $P(D_S \mid F) = 0,19$.

$$P(D_S) = 0,95 \cdot 0,05 + 0,19 \cdot 0,95 = 0,0475 + 0,1805 = 0,228$$

$$P(F \mid D_S) = \frac{0,19 \cdot 0,95}{0,228} = \frac{0,1805}{0,228} \approx \boxed{79,17 \%}$$

Eftersom så få är sjuka kommer de flesta positiva svar från friska personer.

Kontrollerat mot facit.

3. Tre defekta av fyra muttrar

Bland 11 muttrar finns 5 defekta. Man tar 4 muttrar på måfå utan återläggning. Vad är sannolikheten att exakt 3 av de 4 muttrarna är defekta? Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Dragning utan återläggning: **Hypergeometrisk fördelning**.

Ledtråd 2

Gynnsamma fall: välj 3 av de 5 defekta och 1 av de 6 hela.

Ledtråd 3

Möjliga fall: $\binom{11}{4}$.

Lösning

$$P(\text{exakt 3 defekta}) = \frac{\binom{5}{3}\binom{6}{1}}{\binom{11}{4}} = \frac{10 \cdot 6}{330} \approx \boxed{18,18 \%}$$

På räknaren. `nCr(5,3)*nCr(6,1)/nCr(11,4)`.

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit skriver $\binom{5}{1}$ i täljaren, men det ska vara $\binom{6}{1}$ (sex hela muttrar); facits siffervärde 0,1818 stämmer med $\binom{6}{1}$.

4. Summa av 60 Poissonvariabler

Slumpvariablerna $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{60}$ är oberoende och Poissonfördelade med väntevärde lika med 3. Låt ξ beteckna summan av dessa 60 slumpvariabler. Beräkna sannolikheten $P(\xi \leq 203)$. Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

En summa av många oberoende variabler: **Centrala gränsvärdessatsen**.

 Ledtråd 2

Varje $\xi_i \in \text{Po}(3)$ har $\mu = 3$ och $\sigma^2 = 3$ (**Poissonfördelning**).

 Ledtråd 3

Summan har $E(\xi) = 180$ och $V(\xi) = 180$, så $\xi \approx N(180; \sqrt{180})$.

 Lösning

Summan har väntevärde $60 \cdot 3 = 180$ och varians $60 \cdot 3 = 180$. Enligt CGS är $\xi \approx N(180; \sqrt{180})$:

$$P(\xi \leq 203) \approx \Phi\left(\frac{203 - 180}{\sqrt{180}}\right) = \Phi(1,714) \approx \boxed{95,68 \%}$$

På räknaren. `normCdf(-1E99, 203, 180, sqrt(180))`.

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit anger 95,64 %; det är tabellvärdet $\Phi(1,71)$, medan $\Phi(1,7143) = 0,9568$. (Summan är exakt $\text{Po}(180)$, som ger 95,80 %, men uppgiften är tänkt att lösas med CGS.)

5. Standardavvikelse för det genomsnittliga felet

En statistikintresserad snickare har undersökt kapning av brädor med en viss utrustning, och funnit att felet vid en kapning hade väntevärdet 0,2 och standardavvikelsen 1,7 (enhet: mm). Om snickaren nu ska kapa upp 16 brädor, vad blir standardavvikelsen för det genomsnittliga felet? Ange ditt svar med tre decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Det genomsnittliga felet är ett medelvärde: **Medelvärdets fördelning**.

 Ledtråd 2

$D(\bar{\xi}) = \sigma/\sqrt{n}$. Det gäller för alla fördelningar, ingen normalfördelning behövs.

 Ledtråd 3

$\sigma = 1,7$ och $n = 16$. Väntevärdet 0,2 påverkar inte spridningen.

 Lösning

$$D(\bar{\xi}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,7}{\sqrt{16}} = \boxed{0,425 \text{ mm}}$$

Här antas ingenting om normalfördelning, så det är satsen om **linjära funktioner** som ger resultatet.

Kontrollerat mot facit.

6. Väntevärde ur 75:e percentilen

Slumpvariabeln ξ har en exponentialfördelning. Den 75:e percentilen i fördelningen är lika med 3,9. Beräkna väntevärdet av ξ . Ange ditt svar med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Exponentialfördelning och percentiler.

 Ledtråd 2

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, och den 75:e percentilen uppfyller $F(3,9) = 0,75$.

 Ledtråd 3

$e^{-3,9\lambda} = 0,25$ ger λ . Sedan $E(\xi) = 1/\lambda$.

 Lösning

$$1 - e^{-3,9\lambda} = 0,75 \iff \lambda = \frac{-\ln 0,25}{3,9} = \frac{\ln 4}{3,9}$$

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda} = \frac{3,9}{\ln 4} \approx \boxed{2,81}$$

Kontrollerat mot facit.

7. Slumpvandring till talet 16

En partikel utför "slumpvandring" på tallinjen. Partikeln startar på talet 0 och hoppar sedan ett steg varje sekund. Steglängden är lika med 1 och hoppet görs i negativ respektive positiv riktning med sannolikhet 0,5. Vid tidpunkten 1 är alltså partikeln på talet -1 med sannolikhet 0,5 och på talet 1 med sannolikhet 0,5. Hopp som görs vid olika tidpunkter är oberoende.

Vad är sannolikheten att partikeln vid tiden 20 sekunder befinner sig på talet 16? Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Räkna antalet hopp åt höger: **Binomialfördelning**.

 Ledtråd 2

Med η hopp åt höger av 20 är positionen $\eta - (20 - \eta) = 2\eta - 20$, och $\eta \in \text{Bin}(20; 0,5)$.

 Ledtråd 3

$$2\eta - 20 = 16 \iff \eta = 18.$$

 Lösning

Positionen 16 kräver $\eta = 18$ hopp åt höger:

$$P(\eta = 18) = \binom{20}{18} 0,5^{20} = \frac{190}{1\,048\,576} \approx 0,000181 = \boxed{0,02 \%}$$

På räknaren. `binomPdf(20,0.5,18)`.

Kontrollerat mot facit.

8. Kritisk gräns för kvicksilver i gäddor

Vid undersökning av kvicksilverhalten i gäddor i en insjö har man bestämt kvicksilverhalten i 20 fångade gäddor. De uppmätta värdena $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ kan betraktas som observationer från en normalfördelning där väntevärdet är lika med μ och där standardavvikelsen, som är känd på förhand, är lika med 0,8. För att testa

$$H_0: \mu = 0,85 \text{ mot } H_1: \mu > 0,85$$

har man beslutat sig för att använda testvariabeln

$$w = \bar{x} - 0,85$$

och beslutsregeln "förkasta H_0 om $w > k$ ", där k är en konstant. (Här är $\bar{x}$ medelvärdet av $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}$.)

Vilket värde ska k ha för att testet ska få 10 % signifikansnivå? Svara med tre decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1Signifikansnivå: $P(w > k \mid H_0) = 0,10$. **Ledtråd 2**Under H_0 är $\bar{\xi} \in N(0,85; 0,8/\sqrt{20})$, så $w \in N(0; 0,8/\sqrt{20})$. **Ledtråd 3**

$$k = \lambda_{0,10} \cdot 0,8/\sqrt{20}.$$

 LösningUnder H_0 är $w = \bar{\xi} - 0,85 \in N(0; 0,8/\sqrt{20}) = N(0; 0,1789)$. Villkoret $P(w > k) = 0,10$ ger

$$k = \lambda_{0,10} \cdot \frac{0,8}{\sqrt{20}} = 1,2816 \cdot 0,1789 \approx \boxed{0,229}$$

Med regeln "förkasta om $\bar{x} > k$ " hade gränsen i stället blivit $0,85 + 0,229 = 1,079$.**På räknaren.** `invNorm(0.9)*0.8/sqrt(20)`.*Kontrollerat mot facit.*

9. Alkohol och reaktionstid: konfidensintervall

Vid en undersökning av alkohols inverkan på reaktionstiden på 6 slumpvis utvalda personer fick man följande resultat (tid i sekunder).

Person	1	2	3	4	5	6
Före alkohol	0,2	0,15	0,2	0,15	0,25	0,1
Efter alkohol	0,65	0,65	0,65	0,75	0,65	0,75

Mätningen före och efter alkohol på person nr i är en observation från $N(\mu_i, \sigma_1)$ respektive $N(\mu_i + \Delta, \sigma_2)$, där Δ , σ_1 och σ_2 är okända konstanter. Beräkna ett 95 % konfidensintervall för Δ . Svara med intervallets nedre gräns och använd tre decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Samma person mäts två gånger: **Stickprov i par**.

Ledtråd 2

Bilda differenserna $z_i = \text{efter} - \text{före}$. De är observationer från $N(\Delta, \sigma)$ med okänd σ .

Ledtråd 3

Konfidensintervall med t-fördelningen: $\bar{z} \pm t_{0,025}(5) \cdot s_z / \sqrt{6}$.

Lösning

Differenserna är

z_i	0,45	0,5	0,45	0,6	0,4	0,6
-------	------	-----	------	-----	-----	-----

med $\bar{z} = 0,5083$ och $s_z = 0,09704$. Med $t_{0,025}(5) = 2,5706$ blir den nedre gränsen

$$\bar{z} - t_{0,025}(5) \cdot \frac{s_z}{\sqrt{6}} = 0,5083 - 2,5706 \cdot \frac{0,09704}{\sqrt{6}} \approx \boxed{0,406}$$

Hela intervallet är $[0,406; 0,610]$ sekunder.

På räknaren. `invt(0.975,5)`, eller `tInterval` direkt på listan med differenser.

Kontrollerat mot facit.

10. Teckentest för medicin och reaktionstid

En forskare vill undersöka om en viss medicin har en negativ effekt på reaktionstiden vid bilkörning. För att undersöka om så är fallet valde forskaren ut 10 bilförare slumpmässigt och mätte deras reaktionstider (enhet: millisek) före och efter att de tagit medicinen. Resultatet visas i tabellen nedan.

reaktionstid före	263,8	265,3	212,1	224,9	290,6	272,1
reaktionstid efter	271,6	273,5	220,6	230,2	297,8	271,1

Forskaren beslutade sig för att man i denna situation *inte* kunde anta att reaktionstiderna och deras differenser var normalfördelade. För att testa

H_0 : "medicinen påverkar inte reaktionstiden i genomsnitt"

mot den tvåsidiga mothypotesen

H_1 : "reaktionstiden är i genomsnitt längre eller kortare då medicinen används",

valde forskaren därför att använda metoden med teckentest.

Vilken är den lägsta signifikansnivå på vilken H_0 kan förkastas, dvs vad blir P-värdet α_0 ? Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Teckentest: räkna bara tecknen på differenserna och använd **Direktmetoden**.

Ledtråd 2

Låt η = antal förare med kortare tid efter. Under H_0 är $\eta \in \text{Bin}(10; 0,5)$ (Binomialfördelning).

Ledtråd 3

Tvåsidig mothypotes: $\alpha_0 = P(\eta \leq x) + P(\eta \geq 10 - x) = 2P(\eta \leq x)$.

Lösning

Modell. Bara förare nr 6 fick kortare tid efter medicinen ($271,2 < 272,1$); de andra nio fick längre tid. Låt η = antal förare med kortare tid efter. Under H_0 är $\eta \in \text{Bin}(10; 0,5)$, och vi har observerat $x = 1$.

Direktmetoden. Mothypotesen är tvåsidig, så lika extrema utfall åt båda håll räknas:

$$\alpha_0 = P(\eta \leq 1) + P(\eta \geq 9) = 2 \cdot \frac{1 + 10}{1024} \approx \boxed{2,15 \%}$$

På räknaren. `2*binomCdf(10,0.5,0,1)`.

Kontrollerat mot facit. Facit kallar ξ "antal med längre reaktionstid efter" men sätter $x = 1$; det är antalet med kortare tid. På grund av symmetrin blir P-värdet detsamma.

11. Sjukhuset i sydvästra hörnet

Ett sjukhus ska placeras i ett mycket stort kvadratisk samhälle. Samhället representeras av kvadraten $K = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$, där $(x, y) = (0, 0)$ motsvarar samhällets sydvästra hörn. Gatusystemet är beskaffat så att man endast kan färdas i en riktning som är parallell med koordinataxlarna.

Antag att den slumpmässiga platsen för en olycka kan beskrivas med en likformig fördelning på K . Om sjukhuset placeras i samhällets sydvästra hörn, vad är sannolikheten att det avstånd som en ambulans behöver färdas vid uttryckning är högst lika med 0,7? Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 3

Ledtråd 1

Likformig fördelning på en kvadrat med arean 1: sannolikhet = area
(Flerdimensionella fördelningar).

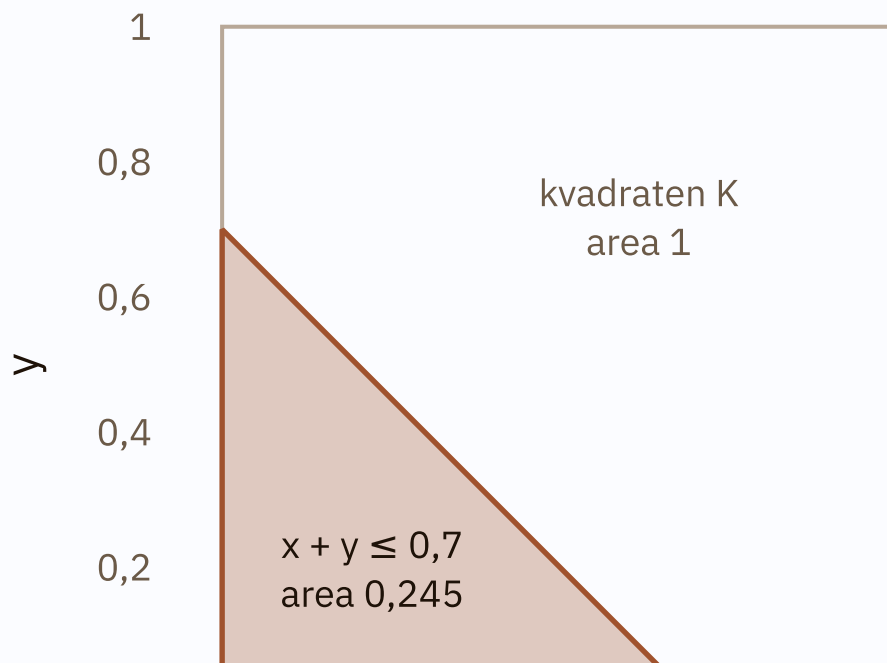
Ledtråd 2

Man får bara åka parallellt med axlarna, så avståndet från $(0, 0)$ till (x, y) är $x + y$.

Ledtråd 3

Området $x + y \leq 0,7$ i kvadraten är en triangel med kateterna 0,7.

 Lösning



Olycksplatsen (ξ, η) är likformigt fördelad på K , och sträckan ambulansen kör är $\xi + \eta$. Området $A = \{(x, y) : x + y \leq 0.7\}$ begränsas av axlarna och linjen $y = 0.7 - x$:

$$P(\xi + \eta \leq 0.7) = \text{arean av } A = \frac{0.7^2}{2} = \boxed{24.5 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

12. Överstiger Majas utgifter Joels?

Majas och Joels utgifter för kursmaterial (enhet: kr) kan betraktas som slumpmässiga, där Majas utgifter/månad har väntevärdet 470 kr och standardavvikelsen 32 kr medan Joels utgifter/månad antas ha väntevärdet 485 kr och standardavvikelsen 20 kr. Antag att Majas och Joels utgifter för kursmaterial är beroende, med korrelation lika med 0,9, samt att de kan beskrivas med en tvådimensionell normalfördelning.

Vad är sannolikheten att Majas utgifter under en månad överstiger Joels? Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

En differens av två beroende normalfördelade variabler: **Tvådimensionell normalfördelning**.

Ledtråd 2

$\xi_M - \xi_J$ är normalfördelad med $V(\xi_M - \xi_J) = \sigma_M^2 + \sigma_J^2 - 2\rho\sigma_M\sigma_J$ (**Kovarians**).

Ledtråd 3

$\xi_M - \xi_J \in N(-15; \sigma)$ med $\sigma^2 = 32^2 + 20^2 - 2 \cdot 0,9 \cdot 32 \cdot 20 = 272$. Sök $P(\xi_M - \xi_J > 0)$.

Lösning

Låt $\xi_M \in N(470, 32)$ och $\xi_J \in N(485, 20)$. Differensen är normalfördelad:

$$\sigma = \sqrt{32^2 + 20^2 - 2 \cdot 0,9 \cdot 32 \cdot 20} = \sqrt{272} \approx 16,492$$

så $\xi_M - \xi_J \in N(-15; 16,492)$ och

$$P(\xi_M > \xi_J) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - (-15)}{16,492}\right) = \Phi(-0,9095) \approx \boxed{18,15 \%}$$

På räknaren. `normCdf(0,1E99,-15,√(272))`.

Kontrollerat mot facit. Facit räknar med $\xi_J - \xi_M$ och $P(\xi < 0)$, vilket är samma sak. Enligt facit gav uppgiften 3 poäng och uppgift 11 2 poäng i stället för tvärtom, som på utskriften.

13. Del 2: korrelationen ur en sannolikhet

Majas och Joels utgifter för kursmaterial (enhet: kr) kan betraktas som slumpmässiga, där Majas utgifter/månad har väntevärdet 470 kr och standardavvikelsen 32 kr medan Joels utgifter/månad antas ha väntevärdet 485 kr och standardavvikelsen 20 kr. Utgifterna kan beskrivas med en tvådimensionell normalfördelning.

Antag att sannolikheten att Majas utgifter under en månad överstiger Joels är 0,15. Vad är då korrelationen mellan Joel och Majas utgifter?

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Samma modell som i uppgift 12, men nu baklänges: sannolikheten är känd och **korrelationen** okänd.

Ledtråd 2

$$\xi = \xi_M - \xi_J \in N(-15; \sigma) \text{ med } \sigma^2 = 32^2 + 20^2 - 2\rho \cdot 32 \cdot 20.$$

Ledtråd 3

$$P(\xi > 0) = 0,15 \text{ ger } 15/\sigma = \lambda_{0,15}. \text{ Lös ut } \sigma \text{ och sedan } \rho.$$

Lösning

Modell. Låt $\xi_M \in N(470, 32)$ och $\xi_J \in N(485, 20)$ med okänd korrelation ρ . Eftersom paret är **tvådimensionellt normalfördelat** är differensen normalfördelat:

$$\xi = \xi_M - \xi_J \in N(-15; \sigma), \quad \sigma^2 = 32^2 + 20^2 - 2\rho \cdot 32 \cdot 20$$

Villkoret. Standardisera:

$$P(\xi > 0) = P\left(\frac{\xi + 15}{\sigma} > \frac{15}{\sigma}\right) = 0,15 \iff \frac{15}{\sigma} = \lambda_{0,15} = 1,0364$$

så $\sigma = 15/1,0364 = 14,473$ och $\sigma^2 = 209,47$.

Räkning. Lös ut ρ :

$$\rho = \frac{32^2 + 20^2 - \sigma^2}{2 \cdot 32 \cdot 20} = \frac{1424 - 209,47}{1280} \approx \boxed{0,949}$$

Slutsats. Korrelationen är ungefär 0,95. Det är rimligt: med $\rho = 0,9$ blev sannolikheten 18,15 % i uppgift 12, och en högre korrelation ger en mindre spridning i differensen och därmed en mindre sannolikhet.

På räknaren. `invNorm(0.85)` ger $\lambda_{0,15}$.

Kontrollerat mot facit.

14. Del 2: 25:e percentilen för ett maximum

Antag att $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ är oberoende och $N(0, 1)$ -fördelade. Låt

$$\zeta = \max(\xi_1, \xi_2)$$

Hitta den 25:e percentilen i fördelningen för ζ .

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Funktion av stokastiska variabler: börja med **fördelningsfunktionen** $F_\zeta(z) = P(\zeta \leq z)$.

 Ledtråd 2

$\max(\xi_1, \xi_2) \leq z$ betyder att båda är $\leq z$. **Oberoende** ger $F_{\zeta}(z) = \Phi(z)^2$.

 Ledtråd 3

Den 25:e percentilen L_{25} uppfyller $\Phi(L_{25})^2 = 0,25$.

 Lösning

Modell. ξ_1, ξ_2 är oberoende och $N(0, 1)$. (ξ_3 och ξ_4 används inte.)

Fördelningsfunktion.

$$F_{\zeta}(z) = P(\max(\xi_1, \xi_2) \leq z) = P(\xi_1 \leq z) P(\xi_2 \leq z) = \Phi(z)^2$$

Räkning. Den 25:e percentilen L_{25} (**Median och kvantiler**) uppfyller

$$\Phi(L_{25})^2 = 0,25 \iff \Phi(L_{25}) = 0,5 \iff \boxed{L_{25} = 0}$$

Slutsats. Den 25:e percentilen för maximum av två är medianen för en enskild variabel: $P(\zeta \leq 0) = 0,5^2 = 0,25$.

Kontrollerat mot facit.

15. Del 2: $E((\xi - c)^2)$ minimeras av väntevärdet

Antag att ξ har väntevärde lika med 4. Visa att funktionen $f(c) = E((\xi - c)^2)$ antar sitt minsta värde då $c = 4$.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Utveckla kvadraten och använd räknereglerna för **väntevärden** (Linjära funktioner av stokastiska variabler).

Ledtråd 2

$$E(\xi^2 - 2c\xi + c^2) = E(\xi^2) - 2cE(\xi) + c^2, \text{ där } c \text{ är en konstant.}$$

Ledtråd 3

$f(c)$ är ett andragradspolynom i c . Derivera, eller kvadratkomplettera.

Lösning

Modell. $E(\xi) = 4$, och c är en vanlig konstant.

Räkning. Linjäriteten för väntevärden ger

$$f(c) = E(\xi^2 - 2c\xi + c^2) = E(\xi^2) - 2cE(\xi) + c^2 = E(\xi^2) - 8c + c^2$$

där $E(\xi^2)$ är en konstant som inte beror på c . Derivering ger

$$f'(c) = 2c - 8, \quad f''(c) = 2 > 0$$

så $f'(4) = 0$ och f har ett minimum där. Kvadratkomplettering visar samma sak:

$$f(c) = (c - 4)^2 + E(\xi^2) - 16 = (c - 4)^2 + V(\xi)$$

Slutsats. $f(c) \geq V(\xi)$ med likhet precis när $c = 4$. Minsta värdet är alltså **variansen**.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- S0008M
 - Bayes sats
 - Hypergeometrisk fördelning
 - Centrala gränsvärdessatsen
 - Medelvärdets fördelning
 - Exponentialfördelning
 - Binomialfördelning
 - Signifikansnivå och styrka
 - Stickprov i par
 - Direktmetoden
 - Likformig fördelning
 - Tvådimensionell normalfördelning
 - Icke-linjära funktioner av stokastiska variabler
 - Linjära funktioner av stokastiska variabler
-