

S0008M-2024-05-30

19 okt. 2026, 18 min läsning

UTKAST

#tenta #sannolikhetslära #statistik

Kurs: S0008M — Sannolikhetslära och statistik **Datum:** 2024-05-30 **Källa:** originaltentamen ·
lärarens lösningar (bara del 1)

Översikt

Del 1 (uppgift 1–12, bara svar):

- betingning på en union av oberoende händelser (1), väntevärdet av rörelseenergi (2) och Poisson inuti binomial (3)
- σ ur variansen (4), påbörjade timmar med exponentialfördelning (5) och parkering med likformig fördelning (6)
- CGS för en summa (7), kritisk gräns för enkla hypoteser (8) och stickprov i par (9)
- styrka med hypergeometrisk fördelning (10), betingad fördelning på en cirkelskiva (11) och korrelation mellan två indikatorer (12)

Del 2 (uppgift 13–15):

- fullständig lösning till uppgift 7 (13)
- fullständig lösning till uppgift 10, med signifikansnivå (14)
- fördelningen för $X^2 + Y^2$ med likformiga X och Y (15)

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen. Lärarens facit täcker bara del 1; uppgift 13 och 14 är fullständiga lösningar till uppgift 7 och 10, och uppgift 15 är löst två gånger oberoende av varandra.

1. Betingat på minst en av tre händelser

För de **oberoende** händelserna A , B och C gäller att $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,74$, $P(C) = 0,6$. Låt $D = A \cup B \cup C$. Beräkna den betingade sannolikheten $P(A \mid D)$. Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Betingad sannolikhet: $P(A \mid D) = P(A \cap D)/P(D)$.

Ledtråd 2

$A \subset D$, så $A \cap D = A$.

Ledtråd 3

Räkna $P(D)$ via komplementet: ingen av händelserna inträffar. Använd att händelserna är **oberoende**.

Lösning

Eftersom $A \subset D$ är $A \cap D = A$. Komplementet till D är att ingen av händelserna inträffar, och oberoendet ger

$$P(D) = 1 - P(A^*)P(B^*)P(C^*) = 1 - 0,7 \cdot 0,26 \cdot 0,4 = 0,9272$$

$$P(A \mid D) = \frac{P(A)}{P(D)} = \frac{0,3}{0,9272} \approx \boxed{32,4 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Väntevärdet av rörelseenergin

Hastigheten i x-led (enhet: m/s) för en partikel i viss gas har en $N(0; 2,17)$ -fördelning. Partikelns rörelseenergi i x-led är halva massan gånger hastigheten i kvadrat.

Om partikelns massa (enhet: kg) är $6,39 \cdot 10^{-23}$, vad är då väntevärdet av partikelns rörelseenergi i x-led? Svaret kan skrivas $a \cdot 10^{-23}$. Ange värdet på a och svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Väntevärde av en funktion av en stokastisk variabel: $E(m\xi^2/2) = \frac{m}{2}E(\xi^2)$.

Ledtråd 2

$V(\xi) = E(\xi^2) - (E\xi)^2$ (Varians och standardavvikelse).

Ledtråd 3

$E(\xi) = 0$, så $E(\xi^2) = V(\xi) = 2,17^2$.

Lösning

Låt $\xi \in N(0; 2,17)$ vara hastigheten och $\eta = m\xi^2/2$ rörelseenergin. Eftersom $E(\xi) = 0$ är $E(\xi^2) = V(\xi) = 2,17^2$:

$$E(\eta) = \frac{m}{2} E(\xi^2) = \frac{6,39 \cdot 10^{-23} \cdot 2,17^2}{2} = 15,04 \cdot 10^{-23}$$

Alltså $a = 15,04$.

Kontrollerat mot facit.

3. Extrapersonal i hamnen

Antalet fartyg som ankommer till en bestämd hamn under loppet av en dag har visat sig vara Poissonfördelat med $\lambda = 3$. Om det kommer fler än 5 fartyg på en dag behöver man kalla in extrapersonal för den dagen. Vad är sannolikheten för att man under en 7-dagarsperiod behöver kalla in extrapersonal under minst 2 dagar? Svara i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Två steg: en Poissonfördelning för varje dag och en Binomialfördelning för antalet dagar.

Ledtråd 2

$p = P(\xi > 5)$ med $\xi \in \text{Po}(3)$. Antalet dagar med extrapersonal är $\eta \in \text{Bin}(7; p)$.

Ledtråd 3

$$P(\eta \geq 2) = 1 - P(\eta \leq 1).$$

Lösning

Låt $\xi \in \text{Po}(3)$ vara antalet fartyg en dag. Sannolikheten för extrapersonal en viss dag är

$$p = P(\xi > 5) = 1 - P(\xi \leq 5) \approx 0,08392$$

Dagarna är oberoende, så antalet dagar med extrapersonal är $\eta \in \text{Bin}(7; 0,08392)$:

$$P(\eta \geq 2) = 1 - (1 - p)^7 - 7p(1 - p)^6 \approx 1 - 0,88861 \approx \boxed{11,14 \%}$$

På räknaren. `p:=1-poissoncdf(3,0,5)` och sedan `1-binomcdf(7,p,1)`.

Kontrollerat mot facit.

4. Värdet på a som ger standardavvikelsen 2

Betrakta följande sannolikhetsfördelning där konstanten a är strikt positiv.

x	$-a$	0	a
$P(\xi = x)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

För vilket värde på a blir standardavvikelsen i fördelningen lika med 2? Dvs för vilket värde på a gäller att $V(\xi) = 4$? Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Räkna **väntevärde** och **varians** direkt ur definitionen.

Ledtråd 2

Fördelningen är symmetrisk kring 0, så $\mu = 0$.

Ledtråd 3

$$V(\xi) = \sum (x - 0)^2 P(\xi = x) = \frac{2}{3}a^2.$$

Lösning

Symmetrin ger $E(\xi) = 0$, och

$$V(\xi) = (-a)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + a^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$\frac{2a^2}{3} = 4$ ger $a^2 = 6$ och den positiva lösningen

$$a = \sqrt{6} \approx \boxed{2,45}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Rörmokare och busskort

Den tid som det tar för en rörmokare (enhet: timmar) att genomföra ett visst arbete har en exponentialfördelning vars väntevärde är lika med **4**. Varje *påbörjad* timme innebär **900** kr i lönekostnad.

Anna har beställt ett arbete av den aktuella typen. Anna behöver också köpa ett busskort för **600** kr. Om hon har **3500** kr, vad är då sannolikheten att hon både har råd att betala och köpa nytt busskort? Svara i procent med en decimal.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Exponentialfördelning med väntevärde 4: $\lambda = 1/4$.

Ledtråd 2

Efter busskortet har Anna 2900 kr kvar. Hur många påbörjade timmar räcker det till?

Ledtråd 3

$2900/900 \approx 3,2$, så högst 3 påbörjade timmar: arbetet får ta högst 3 timmar. Räkna $P(\xi \leq 3)$.

Lösning

Låt $\xi \in \text{Exp}(1/4)$ vara arbetstiden. Efter busskortet har Anna $3500 - 600 = 2900$ kr. Tre timmar kostar 2700 kr och fyra 3600 kr, så hon har råd precis när högst 3 timmar påbörjas, alltså när $\xi \leq 3$. (Tar arbetet 3 timmar och 10 minuter debiteras en fjärde timme.)

$$P(\xi \leq 3) = 1 - e^{-3/4} \approx \boxed{52,8 \%}$$

På räknaren. $1 - e^{(-3/4)}$.

Kontrollerat mot facit.

6. Får en bil till plats?

På en gatstump vars längd är 12 m parkeras slumpmässigt en 5 m lång bil. Vad är sannolikheten att ytterligare en bil av samma längd får plats? Använd en lämpligt vald rektangelfördelning för att besvara frågan. Ange ditt svar i procent med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Likformig fördelning: vad är det som är slumpmässigt, och på vilket intervall?

Ledtråd 2

Låt ξ vara avståndet från gatans ena ände till bilens närmaste ände. Bilen ska rymmas på gatan, så $\xi \in R(0, 7)$.

Ledtråd 3

En bil till får plats om det finns minst 5 m fritt på någon sida: $\xi \geq 5$ eller $\xi \leq 2$.

Lösning

Lägg en tallinje längs gatan med origo i ena änden. Låt ξ vara avståndet från origo till bilens närmaste ände. Bilen tar 5 m, så $\xi \in R(0, 7)$.

Framför bilen finns ξ meter och bakom den $7 - \xi$ meter. En bil till får plats om $\xi \geq 5$ eller $7 - \xi \geq 5$, alltså $\xi \leq 2$:

$$P(\xi \leq 2) + P(\xi \geq 5) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \approx \boxed{57,14 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

7. Summan av 30 variabler med täthet $2x$

De stokastiska variablerna $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{30}$ är oberoende och har samma kontinuerliga fördelning, vars frekvensfunktion är $f(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 1$. Låt ξ stå för summan av dessa 30 oberoende slumpvariabler. Beräkna sannolikheten $P(\xi > 22)$. Svara i procent med minst en decimal.

Kommentar: Som vanligt får approximationer användas om sådana skulle kunna motiveras.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

En summa av 30 oberoende, lika fördelade variabler: **Centrala gränsvärdessatsen**.

Ledtråd 2

Räkna $\mu = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx$ och $\sigma^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x \, dx - \mu^2$.

Ledtråd 3

$\mu = 2/3$ och $\sigma^2 = 1/18$. Summan är approximativt $N(30\mu; \sqrt{30}\sigma)$.

Lösning

$$\mu = \int_0^1 2x^2 \, dx = \frac{2}{3}, \quad \sigma^2 = \int_0^1 2x^3 \, dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Enligt CGS är $\xi \approx N(20; \sqrt{30/18}) = N(20; 1,291)$:

$$P(\xi > 22) \approx 1 - \Phi\left(\frac{22 - 20}{1,291}\right) = 1 - \Phi(1,549) \approx \boxed{6,1 \%}$$

På räknaren. `normCdf(22, ∞, 20, √(30/18))`.

Kontrollerat mot facit.

8. Kritisk gräns för brytpinnarna

En tillverkare A av brytpinnar påstår att brytpinnarnas genomsnittliga livslängd är 195 timmar. En konkurrent B tvivlar starkt på detta påstående och hävdar att den genomsnittliga livslängden är 185 timmar. Man låter en opartisk testanstalt mäta livslängden hos 25 slumpmässigt utvalda brytpinnar från A:s tillverkning. Medelvärde av de 25 mätningarna, som betraktas som observationer från en normalfördelning med standardavvikelsen 12 timmar, blev 195.

Du vill hjälpa tillverkare A ställa upp ett hypotestest för att försöka visa att hans påstående är riktigt. Ställ upp nollhypotes och mothypotes och formulera en beslutsregel där **medelvärdet** är testvariabel. Vilket värde ska medelvärdet jämföras med för att testet ska få 10 % signifikansnivå? Svara med två decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Enkla hypoteser: det man vill visa ska stå i mothypotesen.

Ledtråd 2

$H_0 : \mu = 185$ mot $H_1 : \mu = 195$. Förkasta H_0 om $\bar{x} > k$. Under H_0 är $\bar{\xi} \in N(185; 12/\sqrt{25})$ (Medelvärdets fördelning).

Ledtråd 3

$$P(\bar{\xi} > k \mid \mu = 185) = 0,10 \text{ ger } k = 185 + \lambda_{0,10} \cdot 12/5.$$

 Lösning

Stickprovet $\xi_1, \dots, \xi_{25}$ kommer från $N(\mu; 12)$. A vill visa sitt påstående, så det ska stå i mothypotesen:

$$H_0 : \mu = 185 \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu = 195$$

Stora medelvärden talar för H_1 , så beslutsregeln är: förkasta H_0 om $\bar{x} > k$. Under H_0 är $\bar{\xi} \in N(185; 12/\sqrt{25})$, och signifikansnivån 10 % ger

$$k = 185 + \lambda_{0,10} \cdot \frac{12}{\sqrt{25}} = 185 + 1,2816 \cdot 2,4 \approx \boxed{188,08}$$

Det observerade medelvärdet 195 är större än 188,08, så H_0 förkastas och A:s påstående stöds.

På räknaren. `invNorm(0.9, 185, 12/5)`.

Kontrollerat mot facit.

9. Temperaturskillnad Centrum–Hertsön

Nils undrar om utomhustemperaturen i Luleå är högre i Centrum än på Hertsön, som ligger en bit utanför stan. För att undersöka detta mäter han temperaturen vid sex tidpunkter under en dag i januari. Resultatet ges nedan.

Tid	07:00	09:00	12:30	15:00	18:00	22:00
Temperatur i centrum	-12	-9,1	-6	-4,3	-10	-14,2
Temperatur på Hertsön	-13	-9,2	-6,2	-5	-10,5	-13,9

Beräkna ett 95 % konfidensintervall för den genomsnittliga temperaturskillnaden mellan centrum och Hertsön, *definierad som genomsnittlig temperatur i centrum minus genomsnittlig temperatur på Hertsön*, under lämpliga normalfördelningsantaganden. Svara med intervallets **nedre gräns** och ange ditt svar med tre decimaler.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Mätningarna görs vid samma tidpunkter, så de hör ihop två och två: **Stickprov i par**.

 Ledtråd 2

Bilda differenserna $z_i = x_i - y_i$ och gör ett **konfidenstervall** för väntevärdet med **t-fördelningen**: $\bar{z} \pm t_{0,025}(5) s_z / \sqrt{6}$.

 Ledtråd 3

Differenserna är 1; 0,1; 0,2; 0,7; 0,5; -0,3.

 Lösning

Temperaturen varierar kraftigt över dygnet, så mätningarna måste paras ihop tidpunkt för tidpunkt. Differenserna centrum minus Hertsön är

$$z = 1; 0,1; 0,2; 0,7; 0,5; -0,3$$

med $\bar{z} = 0,36667$ och $s_z = 0,46332$. Med $t_{0,025}(5) = 2,5706$ blir nedre gränsen

$$\bar{z} - t_{0,025}(5) \cdot \frac{s_z}{\sqrt{6}} = 0,36667 - 2,5706 \cdot 0,18915 \approx \boxed{-0,120}$$

Hela intervallet är $[-0,120; 0,853]$. Det innehåller 0, så datan visar inte säkert att det är varmare i centrum.

På räknaren. `tInterval` på listan med differenser, eller `invT(0.975,5)` för t -kvantilen.

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit anger $-0,119$; det fås med tabellvärdet $t_{0,025}(5) \approx 2,57$. Med det exakta 2,5706 blir gränsen $-0,11956$, som avrundas till $-0,120$.

10. Styrkan när $p = 0,4$

En låda innehåller 5000 bollar varav $5000 \cdot p$ är röda, dvs p står för andelen röda bollar i lådan. För att testa $H_0 : p = 0,1$ mot $H_1 : p > 0,1$ tar man 10 bollar på måfå utan återläggning och förkastar H_0 om **minst 3** av de 10 bollarna är röda.

Vad blir **styrkan** för detta test då $p = 0,4$? Svara i procent med en decimal.

Kommentar: Som vanligt får approximationer användas om sådana skulle kunna motiveras.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Styrkan är sannolikheten att förkasta H_0 när $p = 0,4$.

Ledtråd 2

Antalet röda är **hypergeometriskt**, $\text{Hyp}(5000, 10, p)$. Eftersom $n/N < 0,1$ kan det approximeras med $\text{Bin}(10; p)$.

Ledtråd 3

$S(0,4) = P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi \leq 2)$ med $\xi \in \text{Bin}(10; 0,4)$.

Lösning

Låt ξ vara antalet röda bland de 10. Då är $\xi \in \text{Hyp}(5000, 10, p)$, och eftersom $n/N = 10/5000 < 0,1$ gäller $\xi \approx \text{Bin}(10; p)$. Styrkan är

$$S(0,4) = P(\xi \geq 3 \mid p = 0,4) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - 0,1673 \approx \boxed{83,3 \%}$$

Normalapproximation går inte här, eftersom $np(1-p) = 2,4 < 10$.

På räknaren. `1-binomCdf(10,0.4,2)`.

Kontrollerat mot facit.

11. Betingad varians på cirkelskivan

En punkt på cirkelskivan som har sitt centrum i origo och vars radie är lika med 1 väljs slumpmässigt (med likformig fördelning). Låt (ξ, η) beteckna punktens (slumpmässiga) x - och y -koordinater.

Bestäm den betingade fördelningen för ξ givet att $\eta = 0,8$. Vad är **variansen** i den **betingade** fördelningen? Svara med minst två decimaler.

Totalpoäng: 3

Ledtråd 1

Betingad fördelning ur en likformig tvådimensionell fördelning.

Ledtråd 2

Den simultana tätheten är konstant på skivan. Givet $\eta = y$ är ξ därför likformigt fördelad på den del av linjen $\eta = y$ som ligger i skivan.

Ledtråd 3

Linjen $y = 0,8$ skär cirkeln i $x = \pm\sqrt{1 - 0,8^2} = \pm 0,6$.

Lösning

Tätheten är $f(x, y) = 1/\pi$ på skivan. Givet $\eta = 0,8$ är den betingade tätheten proportionell mot $f(x; 0,8)$, som är konstant för $|x| \leq \sqrt{1 - 0,64} = 0,6$. Alltså

$$\xi \mid \eta = 0,8 \in R(-0,6; 0,6)$$

och variansen i en likformig fördelning är $(b - a)^2/12$:

$$V(\xi \mid \eta = 0,8) = \frac{1,2^2}{12} = \boxed{0,12}$$

Kontrollerat mot facit.

12. Korrelation mellan bonuspoäng och godkänt

På en universitetskurs används ett system där studenterna kan få bonuspoäng genom att göra webbquizar. Låt slumpvariabeln ξ vara 0 eller 1 beroende på om en slumpmässigt vald student har bonuspoäng (1 om bonuspoäng, 0 annars) och låt slumpvariabeln η vara 0 eller 1 beroende på om studenten får godkänt på tentan (1 om godkänd).

Baserat på statistiken på kursen kan man anta att fördelningen för (ξ, η) är den som visas i tabellen nedan. Beräkna **korrelationen** mellan bonuspoäng och betyg. Svara med tre decimaler.

Bonus \ Betyg	0	1
0	0,185	0,165
1	0,14	0,51

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Korrelation: $\rho = \frac{C(\xi, \eta)}{\sqrt{V(\xi)V(\eta)}}$.

Ledtråd 2

Börja med **marginalfördelningarna**. En 0/1-variabel med $P(1) = p$ har väntevärde p och varians $p(1 - p)$.

Ledtråd 3

$E(\xi\eta) = P(\xi = 1, \eta = 1) = 0,51$, så $C(\xi, \eta) = 0,51 - E(\xi)E(\eta)$ (Kovarians).

Lösning

Marginalerna: $P(\xi = 1) = 0,14 + 0,51 = 0,65$ och $P(\eta = 1) = 0,165 + 0,51 = 0,675$. Alltså

$$E(\xi) = 0,65, \quad V(\xi) = 0,65 \cdot 0,35, \quad E(\eta) = 0,675, \quad V(\eta) = 0,675 \cdot 0,325$$

Bara termen $x = y = 1$ bidrar till $E(\xi\eta)$, så $E(\xi\eta) = 0,51$ och

$$C(\xi, \eta) = 0,51 - 0,65 \cdot 0,675 = 0,07125$$

$$\rho = \frac{0,07125}{\sqrt{0,65 \cdot 0,35 \cdot 0,675 \cdot 0,325}} \approx \boxed{0,319}$$

Kontrollerat mot facit.

13. Del 2: fullständig lösning till uppgift 7

Skriv en fullständig lösning till uppgift 7. Om du redan skrivit en fullständig lösning på uppgift 7 så kan du bara skriva "Se uppgift 7" på lösningspappret.

Uppgift 7 återges nedan så att du slipper bläddra.

De stokastiska variablerna $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{30}$ är oberoende och har samma kontinuerliga fördelning, vars frekvensfunktion är $f(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 1$. Låt ξ stå för summan av dessa 30 oberoende slumpvariabler. Beräkna sannolikheten $P(\xi > 22)$.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

En summa av många oberoende, lika fördelade variabler: **Centrala gränsvärdessatsen**. En fullständig lösning motiverar varför den får användas.

Ledtråd 2

Du behöver $\mu = E(\xi_i)$ och $\sigma^2 = V(\xi_i)$ ur **frekvensfunktionen**. Summan har väntevärde 30μ och varians $30\sigma^2$.

Ledtråd 3

$$E(\xi_i^2) = \int_0^1 2x^3 dx = 1/2. \text{ Standardisera sedan med } \sqrt{30}\sigma.$$

Lösning

I originalet saknas siffran i “fullständig lösning på uppgift”; det ska vara uppgift 7.

Modell. $\xi_1, \dots, \xi_{30}$ är oberoende med täthet $f(x) = 2x$ på $[0, 1]$, och $\xi = \sum_{i=1}^{30} \xi_i$.

Metod. Variablerna är oberoende och lika fördelade med ändlig varians, och $n = 30$ är tillräckligt stort för att CGS ska ge en god approximation. Alltså är ξ approximativt $N(30\mu; \sqrt{30}\sigma)$.

Räkning.

$$\mu = E(\xi_i) = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = \frac{2}{3}, \quad E(\xi_i^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = V(\xi_i) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Oberoendet ger $E(\xi) = 30 \cdot \frac{2}{3} = 20$ och $V(\xi) = 30 \cdot \frac{1}{18} = \frac{5}{3}$, så $D(\xi) = 1,291$. Därmed

$$P(\xi > 22) = 1 - P(\xi \leq 22) \approx 1 - \Phi\left(\frac{22 - 20}{1,291}\right) = 1 - \Phi(1,549) \approx 0,0607$$

Slutsats. $P(\xi > 22) \approx \boxed{6,1 \%}$.

Tätheten $2x$ är sned, så approximationen är inte perfekt: en numerisk beräkning av den exakta fördelningen för summan ger ungefär 5,8 %.

På räknaren. `normCdf(22, ∞, 20, √(5/3))`.

Kontrollerat mot facit (uppgift 7).

14. Del 2: fullständig lösning till uppgift 10

Skriv en fullständig lösning till uppgift 10. Beräkna även testets signifikansnivå.

Uppgift 10 återges nedan så att du slipper bläddra.

En låda innehåller 5000 bollar varav $5000 \cdot p$ är röda, dvs p står för andelen röda bollar i lådan. För att testa $H_0 : p = 0,1$ mot $H_1 : p > 0,1$ tar man 10 bollar på måfå utan återläggning och förkastar H_0 om **minst 3** av de 10 bollarna är röda.

Vad blir **styrkan** för detta test då $p = 0,4$?

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Signifikansnivå och styrka: båda är sannolikheten att förkasta H_0 , men för olika värden på p .

Ledtråd 2

ξ = antal röda är $[[\text{Hypergeometrisk fördelning}|\text{Hyp}(5000, 10, p)]]$, vilket approximeras med $[[\text{Binomialfördelning}|\text{Bin}(10; p)]]$ eftersom $n/N < 0,1$.

Ledtråd 3

$\alpha = P(\xi \geq 3 \mid p = 0,1)$ och $S(0,4) = P(\xi \geq 3 \mid p = 0,4)$.

Lösning

Modell. Låt ξ vara antalet röda bollar bland de 10. Dragningen sker utan återläggning, så $\xi \in \text{Hyp}(5000, 10, p)$. Eftersom $n/N = 10/5000 < 0,1$ får vi approximera med $\xi \approx \text{Bin}(10; p)$.

Hypoteser/metod. $H_0 : p = 0,1$ mot $H_1 : p > 0,1$. Beslutsregel: förkasta H_0 om $\xi \geq 3$. Signifikansnivån är sannolikheten att förkasta när H_0 är sann, och styrkan i $p = 0,4$ är sannolikheten att förkasta när $p = 0,4$.

Räkning. Signifikansnivån:

$$\alpha = P(\xi \geq 3 \mid p = 0,1) = 1 - \sum_{k=0}^2 \binom{10}{k} 0,1^k 0,9^{10-k} = 1 - 0,9298 \approx 0,070$$

Styrkan:

$$S(0,4) = P(\xi \geq 3 \mid p = 0,4) = 1 - \sum_{k=0}^2 \binom{10}{k} 0,4^k 0,6^{10-k} = 1 - 0,1673 \approx 0,833$$

Normalapproximation går inte att motivera, eftersom $np(1-p)$ är 0,9 respektive 2,4, långt under 10.

Slutsats.

$$\alpha \approx 7,0 \%, \quad S(0,4) \approx 83,3 \%$$

Den exakta hypergeometriska fördelningen ger samma svar på en decimal.

På räknaren. `1-binomCdf(10,0.1,2)` och `1-binomCdf(10,0.4,2)`.

Kontrollerat mot facit. Lärarens facit (uppgift 10) anger styrkan 83,3 % men inte signifikansnivån; $\alpha \approx 7,0 \%$ är räknad två gånger oberoende, binomialt och hypergeometriskt.

15. Del 2: fördelningen för $X^2 + Y^2$

Antag att X och Y är oberoende och $R(-0,5; 0,5)$ -fördelade. Bestäm fördelningsfunktion och frekvensfunktion för slumpvariabeln $Z = X^2 + Y^2$.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Funktion av två stokastiska variabler: börja med fördelningsfunktionen $F_Z(z) = P(X^2 + Y^2 \leq z)$.

Ledtråd 2

(X, Y) är likformigt fördelad på kvadraten $[-0,5; 0,5]^2$, som har area 1. Därför är $F_Z(z)$ arean av den del av cirkelskivan med radie $\sqrt{z}$ som ligger i kvadraten.

Ledtråd 3

För $z \leq 1/4$ ligger hela skivan i kvadraten. För $1/4 < z \leq 1/2$ sticker fyra cirkelsegment ut genom kvadratens sidor; dra bort dem. Ett segment bortom linjen $x = 1/2$ har halva öppningsvinkeln $\theta = \arccos(1/(2\sqrt{z}))$.

Lösning

Modell. X och Y är oberoende och $R(-0,5; 0,5)$, så den simultana tätheten är $f(x, y) = 1$ på kvadraten $Q = [-0,5; 0,5]^2$. Sannolikheten för en mängd i Q är alltså dess area. Z antar värden i $[0; 1/2]$, eftersom kvadratens hörn ligger på avståndet $\sqrt{1/2}$ från origo.

Metod. $F_Z(z) = P(X^2 + Y^2 \leq z)$ är arean av skivan $x^2 + y^2 \leq z$ (radie $r = \sqrt{z}$) snittad med Q . Därefter deriveras F_Z .

Räkning. Fall $0 \leq z \leq 1/4$. Då är $r \leq 1/2$ och hela skivan ligger i Q :

$$F_Z(z) = \pi r^2 = \pi z$$

Fall $1/4 < z \leq 1/2$. Nu är $1/2 < r \leq \sqrt{1/2}$. Skivan sticker ut genom alla fyra sidor, men segmenten överlappar inte eftersom hörnen fortfarande ligger utanför. Segmentet bortom $x = 1/2$ har halva öppningsvinkeln $\theta = \arccos(1/(2r))$ och arean

$$r^2\theta - r \cos \theta \cdot r \sin \theta = z \arccos \frac{1}{2\sqrt{z}} - \frac{1}{2} \sqrt{z - \frac{1}{4}}$$

Fyra sådana segment dras bort:

$$F_Z(z) = \pi z - 4z \arccos \frac{1}{2\sqrt{z}} + 2\sqrt{z - \frac{1}{4}}$$

Kontroll: $z = 1/2$ ger $\arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$ och $F_Z = \pi/2 - \pi/2 + 1 = 1$. Vid $z = 1/4$ ger båda uttrycken $\pi/4$.

Derivering. Med $\frac{d}{dz} \arccos \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{4z\sqrt{z - 1/4}}$ blir

$$\frac{d}{dz} \left(4z \arccos \frac{1}{2\sqrt{z}} \right) = 4 \arccos \frac{1}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{z - 1/4}}, \quad \frac{d}{dz} 2\sqrt{z - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{z - 1/4}}$$

och rottermerna tar ut varandra.

Slutsats.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \pi z, & 0 \leq z \leq \frac{1}{4} \\ \pi z - 4z \arccos \frac{1}{2\sqrt{z}} + 2\sqrt{z - \frac{1}{4}}, & \frac{1}{4} < z \leq \frac{1}{2} \\ 1, & z > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \pi, & 0 < z < \frac{1}{4} \\ \pi - 4 \arccos \frac{1}{2\sqrt{z}}, & \frac{1}{4} < z < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Tätheten är konstant π upp till $1/4$ och sjunker sedan till 0 vid $z = 1/2$.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Se även

- [S0008M](#)
- [Betingad sannolikhet](#)
- [Oberoende händelser](#)
- [Poissonfördelning](#)
- [Binomialfördelning](#)
- [Hypergeometrisk fördelning](#)
- [Exponentialfördelning](#)
- [Likformig fördelning](#)
- [Centrala gränsvärdessatsen](#)
- [Enkla hypoteser](#)
- [Signifikansnivå och styrka](#)
- [Stickprov i par](#)

- Betingad fördelning och betingat väntevärde
 - Korrelation
 - Icke-linjära funktioner av stokastiska variabler
-