

S0008M-2024-03-18

19 okt. 2026, 15 min läsning

UTKAST

#tenta #sannolikhetslära #statistik

Kurs: S0008M — Sannolikhetslära och statistik **Datum:** 2024-03-18 **Källa:** originaltentamen ·
lärarens lösningar (uppgift 1–14)

Översikt

Del 1 (uppgift 1–12, bara svar):

- betingning med komplement (1), betingning i normalfördelningen (2) och en ljusslinga (3)
- Poisson under en linjär funktion (4), variansen för triangelfördelningen (5) och väntevärde ur fördelningsfunktionen (6)
- CGS för hypergeometrisk variabler (7), kritiskt värde för z (8), konfidensintervall för två stickprov (9) och styrka för ett binomialtest (10)
- betingat väntevärde ur en tabell (11) och kovarians för summor av exponentialvariabler (12)

Del 2 (uppgift 13–15):

- vaccintest med direktmetoden (13)
- max och min av likformiga variabler (14)
- variansen för en slumpmässigt sammansatt summa av livslängder (15)

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit. Facit täcker uppgift 1–14; uppgift 15 är löst två gånger oberoende av varandra.

1. Betingat på att B inte inträffar

För händelserna A och B gäller att $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,32$ och $P(A \cap B) = 0,18$. Beräkna den betingade sannolikheten att A inträffar givet att B inte inträffar, det vill säga beräkna $P(A \mid B^c)$. Svara i procent med minst **en decimal**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Betingad sannolikhet med komplementhändelsen B^c .

Ledtråd 2

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}.$$

Ledtråd 3

A delas upp i $A \cap B$ och $A \cap B^c$, så $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

Lösning

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,3 - 0,18}{1 - 0,32} = \frac{0,12}{0,68} \approx \boxed{17,6 \%}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Betingning i standardnormalfördelningen

Låt $\xi \in N(0, 1)$. Beräkna den betingade sannolikheten $P(\xi > 2 \mid \xi > 1)$. Svara i **procent** med **två decimaler**.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Betingad sannolikhet för en standardiserad normalfördelad variabel.

 Ledtråd 2

$$P(\xi > 2 \mid \xi > 1) = \frac{P(\xi > 2 \text{ och } \xi > 1)}{P(\xi > 1)}.$$

 Ledtråd 3

Händelsen $\xi > 2$ ligger helt inuti $\xi > 1$, så snittet är bara $\xi > 2$.

 Lösning

Eftersom $\{\xi > 2\} \subset \{\xi > 1\}$ är

$$P(\xi > 2 \mid \xi > 1) = \frac{1 - \Phi(2)}{1 - \Phi(1)} = \frac{0,02275}{0,15866} \approx \boxed{14,34 \%}$$

På räknaren. `normCdf(2,9E999,0,1)/normCdf(1,9E999,0,1)`.

Kontrollerat mot facit.

3. Ljusslinga med 25 lampor

En ljusslinga består av 25 lampor, som är kopplade så att om en lampa slutar fungera så slocknar hela ljusslingan. Varje lampa har sannolikheten 0,03 att sluta fungera inom en 3-årsperiod. Lamporna fungerar oberoende av varandra. Vad är sannolikheten att alla 25 lampor i ljusslingan fungerar efter en 3-årsperiod, utan att något lampbyte är gjort? Svara i **procent** med **två decimaler**.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Alla lampor ska fungera: ett snitt av **oberoende händelser**.

 Ledtråd 2

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_{25}) = P(A_1) \cdots P(A_{25}).$$

 Ledtråd 3

Varje lampa fungerar med sannolikheten $1 - 0,03 = 0,97$.

 Lösning

Låt A_i vara händelsen att lampa i fungerar efter 3 år, $P(A_i) = 0,97$. Oberoendet ger

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_{25}) = 0,97^{25} \approx \boxed{46,70 \%}$$

På räknaren. `binomPdf(25,0.97,25)` eller direkt `0.97^25`.

Kontrollerat mot facit.

4. Poissonvariabel under en linjär funktion

Antag att $\xi \in \text{Po}(\lambda)$ där $\lambda = 2,2$. Låt $\eta = 2 \cdot \xi + 3$. Beräkna sannolikheten $P(\eta = 15)$. Svara i **procent** med **två decimaler**.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Översätt händelsen för η till en händelse för den **Poissonfördelade** ξ .

Ledtråd 2

$$\eta = 15 \iff 2\xi + 3 = 15 \iff \xi = 6.$$

Ledtråd 3

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}. \text{ Obs: } \eta \text{ är inte Poissonfördelad.}$$

Lösning

$$P(\eta = 15) = P(\xi = 6) = e^{-2,2} \frac{2,2^6}{6!} \approx \boxed{1,74 \%}$$

η är inte Poissonfördelad: den antar bara udda värden 3, 5, 7, ... och $E(\eta) = 7,4$ medan $V(\eta) = 4 \cdot 2,2 = 8,8$.

På räknaren. `poissPdf(2.2,6)`.

Kontrollerat mot facit.

5. Variansen för triangelfördelningen

Man kan visa att om ξ_1 och ξ_2 är oberoende och **rektangelfördelade**, så får deras **summa** $\xi = \xi_1 + \xi_2$ en så kallad triangelfördelning på intervallet $[-1, 1]$. Att en slumpvariabel har en triangelfördelning på intervallet $[-1, 1]$ betyder att dess frekvensfunktion är

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{om } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

(Namnet "triangelfördelning" kommer av att grafen för f ser ut som en triangel: se den heldragna linjen i figur 6.3 b) i kursboken.)

Beräkna variansen $V(\xi)$ om ξ har en **triangelfördelning** på intervallet $[-1, 1]$. Svara med **två decimaler**.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

Varians, antingen direkt ur **frekvensfunktionen** eller via summan i uppgiftstexten.

 Ledtråd 2

ξ har samma fördelning som $\xi_1 + \xi_2$ med ξ_1, ξ_2 oberoende och [[Likformig fördelning| $R(-0,5; 0,5)$]].

 Ledtråd 3

För oberoende variabler adderas varianserna, och $V(R(a, b)) = (b - a)^2/12$.

 Lösning

$\xi_1 + \xi_2$ med $\xi_i \in R(-0,5; 0,5)$ oberoende har just denna triangelfördelning, så

$$V(\xi) = V(\xi_1) + V(\xi_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \approx \boxed{0,17}$$

Direkt ur f ger samma sak: $E(\xi) = 0$ av symmetri och $E(\xi^2) = 2 \int_0^1 x^2(1-x) dx = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}$.

Kontrollerat mot facit.

6. Väntevärde ur fördelningsfunktionen

Den kontinuerliga stokastiska variabeln ξ har **fördelningsfunktionen**

$$F(x) = \frac{x^2 - 4}{5} \text{ om } 2 \leq x \leq 3, \quad F(x) = 0 \text{ om } x < 2, \quad F(x) = 1 \text{ om } x > 3.$$

Beräkna **väntevärdet** av ξ . Svara med **två** decimaler.

Kommentar: Om du inte får ett tal mellan 2 och 3 har du räknat fel.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Gå från **fördelningsfunktion** till **frekvensfunktion**.

Ledtråd 2

$$f(x) = F'(x) = \frac{2x}{5} \text{ för } 2 \leq x \leq 3.$$

Ledtråd 3

$$E(\xi) = \int_2^3 x \cdot \frac{2x}{5} dx.$$

Lösning

$f(x) = 2x/5$ på $[2, 3]$ och 0 annars. Då är

$$E(\xi) = \int_2^3 \frac{2x^2}{5} dx = \frac{2}{15} (27 - 8) = \frac{38}{15} \approx \boxed{2,53}$$

Kontrollerat mot facit.

7. Summa av 40 hypergeometriska variabler

Antag att slumpvariablerna $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{40}$ är oberoende och $\text{Hyp}(N, n, p)$ -fördelade där $N = 4$, $n = 2$, $p = 1/2$. Beräkna sannolikheten $P(\sum_{i=1}^{40} \xi_i \leq 45)$. Svara i **procent** med **en** decimal.

Som vanligt får approximationer användas i de fall då sådana skulle kunna motiveras.

Totalpoäng: 2

 Ledtråd 1

En summa av 40 oberoende likafördelade variabler: **Centrala gränsvärdessatsen**.

 Ledtråd 2

För [[Hypergeometrisk fördelning|Hyp(N, n, p)]] är $E(\xi) = np$ och $V(\xi) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$.

 Ledtråd 3

$E(\xi_i) = 1$ och $V(\xi_i) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, så summan är approximativt $N(40; \sqrt{40/3})$.

 Lösning

$$E(\xi_i) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad V(\xi_i) = \frac{4-2}{4-1} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Enligt CGS är $\sum \xi_i$ approximativt $N(40; \sqrt{40/3}) = N(40; 3,6515)$:

$$P\left(\sum_{i=1}^{40} \xi_i \leq 45\right) \approx \Phi\left(\frac{45-40}{3,6515}\right) = \Phi(1,369) \approx \boxed{91,5 \%}$$

På räknaren. `normCdf(-9E999,45,40,3.6515)`.

Kontrollerat mot facit. Summan är heltalsvärd; med halvkorrektion, $\Phi(5,5/3,6515)$, blir svaret 93,4 %, vilket ligger närmare det exakta värdet 93,5 %. Facit räknar utan halvkorrektion.

8. Kritiskt värde för z

Antag att du har ansvar för att se om tillverkningstiden för en komponent till bakaxlar kan bli kortare. En ny tillverkningsmetod ska provas, och du tror att denna nya metod ger en kortare genomsnittstid än de 126 sekunder som gällt hittills. På grund av att tillverkningstiden kan förväntas variera en hel del

räcker det dock inte med att testa en eller ett fåtal komponenter. Du ska därför utföra 25 mätningar, och resultaten ska studeras i ett hypotestest där du bestämt att testet ska fungera så att det är 2,5 % risk att du påstår att genomsnittstiden med den nya metoden är kortare än 126 sekunder trots att den nya inte är bättre. Du tror dig kunna anta att tillverkningstiden kan beskrivas med en normalfördelning med standardavvikelsen $\sigma = 7$ sekunder.

Ett sätt att utföra hypotestestet är att bestämma värdet på testvariabeln

$$z = \frac{\bar{x} - 126}{7/\sqrt{25}}$$

och sedan jämföra z med ett visst värde. Frågan är, vilket är detta värde? Ange ditt svar med **två** decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Hypotesprövning med känt σ . Risken 2,5 % är **signifikansnivån**.

Ledtråd 2

$H_0 : \mu = 126$ mot $H_1 : \mu < 126$. Under H_0 är $z \in N(0, 1)$.

Ledtråd 3

Mothypotesen pekar nedåt, så H_0 förkastas för små z : $z < k$ med $P(z < k) = 0,025$.

Lösning

Vi testar $H_0 : \mu = 126$ mot $H_1 : \mu < 126$ på nivån $\alpha = 0,025$. Under H_0 är $z \in N(0, 1)$, och H_0 förkastas om $z < k$ där

$$k = -\lambda_{0,025} = \boxed{-1,96}$$

På räknaren. `invNorm(0.025,0,1)`.

Kontrollerat mot facit.

9. Konfidensintervall för $a - b$

Följande värden är ett observerat stickprov från en $N(a, \sigma_1)$ -fördelning (a och σ_1 är okända):

7	6,5	5,3	5,7	5,2	7	5,6
---	-----	-----	-----	-----	---	-----

Följande värden är ett observerat stickprov från en $N(b, \sigma_2)$ -fördelning (b och σ_2 är okända):

4,8	4,8	3,2	5,7	4,1	4,1	6
-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

De två stickproven är oberoende och $\sigma_1 = \sigma_2$. Beräkna ett 90 % konfidensintervall för $a - b$. Svara med den **nedre gränsen** och använd **tre** decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Två stickprov med gemensam okänd σ : ett konfidensintervall byggt på t-fördelningen.

Ledtråd 2

$$I_{a-b} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) \cdot s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \text{ där } s^2 \text{ är den sammanvägda variansen.}$$

Ledtråd 3

Med $n_1 = n_2 = 7$ är $s^2 = (s_x^2 + s_y^2)/2$, och kvantilen är $t_{0,05}(12)$.

Lösning

$$\bar{x} = 6,0429, \quad \bar{y} = 4,6714, \quad s_x^2 = 0,6029, \quad s_y^2 = 0,9457$$

$$s = \sqrt{\frac{0,6029 + 0,9457}{2}} = 0,8799, \quad t_{0,05}(12) = 1,7823$$

$$I_{a-b} = 1,3714 \pm 1,7823 \cdot 0,8799 \cdot \sqrt{\frac{2}{7}} = 1,3714 \pm 0,8383$$

Intervallat blir $[0,533; 2,210]$, och den nedre gränsen är 0,533.

På räknaren. `invT(0.95,12)` ger kvantilen; hela intervallet ges av `2-SampTInt` med "Pooled: Yes".

Kontrollerat mot facit.

10. Styrkan för ett binomialtest

Man är intresserad av den andel p av alla studenter på ett visst universitet som motionerar minst 3 gånger i veckan. En omfattande tidigare undersökning gav då att $p = 0,5$ och man vill nu se om p har ökat. För att testa

$$H_0 : p = 0,5 \quad \text{mot} \quad H_1 : p > 0,5$$

tillfrågade man 15 slumpmässigt utvalda studenter hur många gånger de motionerade på en vecka. Resultatet av undersökningen visas nedan.

Student nr	1	2	3	4	5	6
antal pass/v	0	4	2	0	4	3

Man använde följande beslutsregel: " H_0 förkastas om minst 12 av de 15 studenterna motionerar minst 4 gånger i veckan". Vilken **styrka** har den beslutsregeln om $p = 0,8$? Svara i **procent** med **två decimaler**.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Styrka = sannolikheten att förkasta H_0 när p har ett visst värde (**Styrkefunktion**).

Ledtråd 2

ξ = antal av de 15 som uppfyller villkoret, $\xi \in \text{Bin}(15; p)$. Tabellen behövs inte.

Ledtråd 3

Styrkan är $P(\xi \geq 12 \mid p = 0,8) = 1 - P(\xi \leq 11 \mid p = 0,8)$.

Lösning

Låt ξ = antal av de 15 tillfrågade som motionerar minst 3 gånger i veckan. Då är $\xi \in \text{Bin}(15; p)$, och

$$S(0,8) = P(\xi \geq 12 \mid p = 0,8) = 1 - P(\xi \leq 11 \mid p = 0,8) \approx \boxed{64,82 \%}$$

Beslutsregeln säger "minst 4 gånger" medan p är definierad med "minst 3 gånger". Facit läser regeln som samma egenskap som p (minst 3). Svaret påverkas inte, eftersom styrkan bara beror på att $\xi \in \text{Bin}(15; 0,8)$. I originalet står också "förkasta H_0 förkastas"; det är rättat ovan.

På räknaren. `binomCdf(15,0.8,12,15)`.

Kontrollerat mot facit.

11. Majas förväntade betyg givet Joels

Joel och Maja har pluggat till en tenta som de ska skriva för överbetyg. Sannolikhetsfördelningen för betygen (3, 4 eller 5) ges nedan.

Joel \ Maja	3	4	5
3	0,26	0,11	0,04
4	0,02	0,27	0,13
5	0,01	0,03	0,13

Joel skriver tentan först och meddelar Maja att han fick en fyra. Givet denna information, vad är väntevärdet av Majas betyg? Svara med **två** decimaler.

Totalpoäng: 2

Ledtråd 1

Betingad fördelning och betingat väntevärde ur en tvådimensionell sannolikhetsstabell.

Ledtråd 2

$$P(\text{Maja} = x \mid \text{Joel} = 4) = \frac{P(\text{Joel} = 4, \text{Maja} = x)}{P(\text{Joel} = 4)}.$$

Ledtråd 3

Raden för Joel = 4 summerar till 0,42 (Marginalfördelning).

Lösning

$P(\text{Joel} = 4) = 0,02 + 0,27 + 0,13 = 0,42$. Den betingade fördelningen för Majas betyg är $0,02/0,42$, $0,27/0,42$ och $0,13/0,42$ för 3, 4 och 5:

$$E(\text{Maja} \mid \text{Joel} = 4) = \frac{3 \cdot 0,02 + 4 \cdot 0,27 + 5 \cdot 0,13}{0,42} = \frac{1,79}{0,42} \approx \boxed{4,26}$$

Kontrollerat mot facit.

12. Kovarians för summor av exponentialvariabler

Antag att ξ_1 och ξ_2 är oberoende där $\xi_1 \in \text{Exp}(1)$ och $\xi_2 \in \text{Exp}(1)$. Låt $\eta = \xi_1 + \xi_2$ och låt $\zeta = 2 \cdot \xi_1$. Bestäm kovariansen $C(\eta, \zeta)$. Svara med **en** decimal.

Tips: Bestäm först $E(\xi_1^2)$.

Totalpoäng: 3

Ledtråd 1

Kovarians av linjära kombinationer.

Ledtråd 2

Kovariansen är linjär i båda argumenten, och $C(\xi_1, \xi_2) = 0$ vid oberoende.

Ledtråd 3

$$C(\xi_1 + \xi_2, 2\xi_1) = 2C(\xi_1, \xi_1) + 2C(\xi_2, \xi_1), \text{ och } C(\xi_1, \xi_1) = V(\xi_1).$$

Lösning

För $[[\text{Exponentialfördelning}|\text{Exp}(1)]]$ är $E(\xi_i) = 1$ och $V(\xi_i) = 1$. Linjäriteten ger

$$C(\eta, \zeta) = 2C(\xi_1, \xi_1) + 2C(\xi_2, \xi_1) = 2V(\xi_1) + 0 = \boxed{2,0}$$

Samma sak via tipset: $E(\xi_1^2) = V(\xi_1) + E(\xi_1)^2 = 2$, så $E(\eta\zeta) = 2E(\xi_1^2) + 2E(\xi_1)E(\xi_2) = 4 + 2 = 6$, och $C(\eta, \zeta) = E(\eta\zeta) - E(\eta)E(\zeta) = 6 - 2 \cdot 2 = 2$.

Kontrollerat mot facit.

13. Del 2: har vaccinet effekt?

Under coronapandemin rapporterade svt.se följande: “Modernas vaccin har testats på 30 000 människor, hälften fick två doser vaccin, hälften fick placebo. Enligt analysen ska vaccinet även ha god effekt när det handlar om att motverka allvarlig covid-19-sjukdom. 95 fall av coronasmitta upptäcktes, 90 av dem hittades i gruppen som fick placebo.”

Kan man utifrån detta påstå att vaccinet har en effekt? Ställ upp ett ensidigt hypotestest och använd direktmetoden för att besvara frågan.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Betrakta bara de 95 smittade. Om vaccinet inte har någon effekt, hur fördelar de sig mellan grupperna?

Ledtråd 2

Grupperna är lika stora, så under H_0 hamnar varje smittad i placebogruppen med sannolikheten 0,5: $\xi \in \text{Bin}(95; 0,5)$.

Ledtråd 3

Direktmetoden: $\alpha_0 = P(\xi \geq 90 \mid H_0)$, eftersom många smittade i placebogruppen talar för effekt.

Lösning

Modell. ξ = antal av de 95 smittade som fått placebo (alltså ovaccinerade). Om vaccinet inte påverkar risken är det lika troligt att en smittad kommer från vardera gruppen, eftersom grupperna är lika stora, så $\xi \in \text{Bin}(95; 0,5)$ under H_0 .

Hypoteser. H_0 : vaccinerade har inte minskad risk att smittas ($p = 0,5$) mot H_1 : vaccinerade har minskad risk att smittas ($p > 0,5$).

Observation. $x = 90$.

Direktmetoden.

$$\alpha_0 = P(\xi \geq 90 \mid p = 0,5) = \sum_{k=90}^{95} \binom{95}{k} 0,5^{95} \approx 1,5 \cdot 10^{-21}$$

Slutsats. α_0 är försumbart litet, mycket mindre än varje rimlig signifikansnivå. H_0 förkastas: man kan med mycket liten felrisk påstå att vaccinerade har minskad risk att smittas.

På räknaren. `binomCdf(95, 0.5, 90, 95)`.

Kontrollerat mot facit.

14. Del 2: max och min av likformiga variabler

Antag att $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ är oberoende och $R(0, 1)$ -fördelade. Låt

$$\zeta = \max(\xi_1, \xi_2), \quad \eta = \min(\xi_3, \xi_4).$$

Beräkna sannolikheten $P(\max(\zeta, \eta) > 0,7)$.

Totalpoäng: 10

Ledtråd 1

Max och min av stokastiska variabler: gå till komplementet.

Ledtråd 2

$\max(\zeta, \eta) \leq 0,7 \iff \zeta \leq 0,7 \text{ och } \eta \leq 0,7$. ζ och η bygger på olika ξ_i och är därför oberoende.

Ledtråd 3

Maximum: $P(\zeta \leq a) = P(\xi_1 \leq a)P(\xi_2 \leq a)$. Minimum: $P(\eta > a) = P(\xi_3 > a)P(\xi_4 > a)$.

 Lösning

Metod. Komplementet ger

$$P(\max(\zeta, \eta) > 0,7) = 1 - P(\zeta \leq 0,7, \eta \leq 0,7) = 1 - P(\zeta \leq 0,7) \cdot P(\eta \leq 0,7)$$

där faktoriseringen gäller eftersom ζ beror bara på ξ_1, ξ_2 och η bara på ξ_3, ξ_4 .

Räkning. För $R(0, 1)$ är $P(\xi_i \leq 0,7) = 0,7$.

$$P(\zeta \leq 0,7) = P(\xi_1 \leq 0,7)P(\xi_2 \leq 0,7) = 0,7^2 = 0,49$$

$$P(\eta \leq 0,7) = 1 - P(\xi_3 > 0,7)P(\xi_4 > 0,7) = 1 - 0,3^2 = 0,91$$

Slutsats.

$$P(\max(\zeta, \eta) > 0,7) = 1 - 0,49 \cdot 0,91 = \boxed{0,5541}$$

Kontrollerat mot facit. I facit står $P(\eta > 0,7) = P(\xi_3 > 0,7, \xi_4 \leq 0,7)$, vilket ska vara $P(\xi_3 > 0,7, \xi_4 > 0,7)$; slutsvaret 0,5541 är ändå rätt.

15. Del 2: variansen för den totala livslängden

I ett sjukhuslager finns 15 infusionspumpar av typ A och 10 infusionspumpar av typ B. Man vet att livslängderna för pumparna är exponentialfördelade, där sannolikheten att en pump räcker mer än 30 driftsdygn är 0,97 för pump av typ A och 0,95 för typ B. Om man väljer ut 10 infusionspumpar på måfå från lagret till en intensivvårdsavdelning, vad är då variansen av den totala livslängden för de 10 pumparna?

Totalpoäng: 10

 Ledtråd 1

Två steg av slump: först hur många av varje typ som väljs, sedan livslängderna. Betinga på antalet A-pumpar (**Betingad fördelning och betingat väntevärde**).

Ledtråd 2

Antalet A-pumpar X är [[Hypergeometrisk fördelning|Hyp(25, 10, 0,6)]]. För [[Exponentialfördelning|Exp(λ)]] är $P(T > 30) = e^{-30\lambda}$, $E(T) = 1/\lambda$ och $V(T) = 1/\lambda^2$.

Ledtråd 3

Lagen om total varians: $V(S) = E(V(S | X)) + V(E(S | X))$.

Lösning

Modell. Låt μ_A, μ_B vara väntevärdena för livslängderna. Ur $e^{-30\lambda} = P(T > 30)$ fås

$$\mu_A = \frac{30}{-\ln 0,97} \approx 984,92, \quad \mu_B = \frac{30}{-\ln 0,95} \approx 584,87 \text{ dygn}$$

och variansen för en exponentialfördelad livslängd är väntevärdet i kvadrat. Låt X = antal A-pumpar bland de 10 och S = den totala livslängden. Urvalet sker utan återläggning, så $X \in \text{Hyp}(25, 10, 0,6)$ med

$$E(X) = 6, \quad V(X) = \frac{25 - 10}{25 - 1} \cdot 10 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 1,5$$

Metod. Givet X är S en summa av X oberoende A-livslängder och $10 - X$ oberoende B-livslängder:

$$E(S | X) = X\mu_A + (10 - X)\mu_B, \quad V(S | X) = X\mu_A^2 + (10 - X)\mu_B^2$$

Lagen om total varians ger $V(S) = E(V(S | X)) + V(E(S | X))$.

Räkning.

$$E(V(S | X)) = 6\mu_A^2 + 4\mu_B^2 \approx 5\,820\,450 + 1\,368\,300 = 7\,188\,750$$

$$V(E(S | X)) = (\mu_A - \mu_B)^2 V(X) \approx 400,05^2 \cdot 1,5 \approx 240\,063$$

Slutsats.

$$V(S) \approx 7\,188\,750 + 240\,063 \approx \boxed{7,43 \cdot 10^6 \text{ dygn}^2}$$

Det motsvarar standardavvikelsen $\sigma(S) \approx 2\,726$ dygn. Den andra termen är liten: nästan all osäkerhet kommer från livslängderna själva, inte från blandningen av typer.

Ej kontrollerat mot facit – två oberoende lösningar stämmer överens.

Se även

- S0008M
- Betingad sannolikhet
- Oberoende händelser
- Poissonfördelning
- Likformig fördelning
- Fördelningsfunktion
- Hypergeometrisk fördelning
- Centrala gränsvärdessatsen
- Hypotesprövning
- Två stickprov
- Signifikansnivå och styrka
- Betingad fördelning och betingat väntevärde
- Kovarians
- Direktmetoden
- Max och min av stokastiska variabler
- Exponentialfördelning