M0068M-2026-03-12

Jun 03, 2026, 13 min read

#tenta #flervariabelanalys

> **Kurs:** M0068M — Flervariabelanalys **Datum:** 2026-03-12 **Examinator:** Thomas Strömberg **Källa:** originaltentamen med lösningsförslag

Översikt

Sju uppgifter över hela kursen: tangentplan via gradient och linjekorsning (1), kedjeregel och Eulers homogenitetsrelation (2), extremvärden på triangulärt område (3), variabelbyte i dubbelintegral (4), volym genom skivning (5), kurvintegraler — direkt och via potential (6), och flöde genom parametriserad konyta (7). Räknat efter modul: M1·1 — M2·2 — M3·1 — M4·1 — M5·2.

---

1. Tangentplan och linjens skärning

Pollux Fleetwood ror sin båt i planet $z = 0$ på den spegelblanka sjön Grasmere. Hans nät kan betraktas som en yta vars ekvation ges av

$$x + y^3 z = y + xz^2.$$

Punkten $P = (1, -1, -2)$ är en punkt på nätet som ligger 2 m under vattenytan.

(a) Bestäm en ekvation för nätets tangentplan i punkten P.

(b) En fisk simmar i vattnet längs linjen

$$L: \quad 2x + y = 1, \quad z = -2$$

i riktning mot punkten P. I vilken riktning simmar fisken om den börjar sin färd i planet $x = 0$? Svara med en riktningsvektor $\mathbf{v}$. Kommer fisken att fastna i Pollux nät när den passerar punkten P?

Totalpoäng: 3

Lösning >

2. Kedjeregeln för $w = f(xz, yz)$

Låt $w = f(xz, yz)$ där $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning ett.

(a) Uttryck

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

i partiella derivator av f.

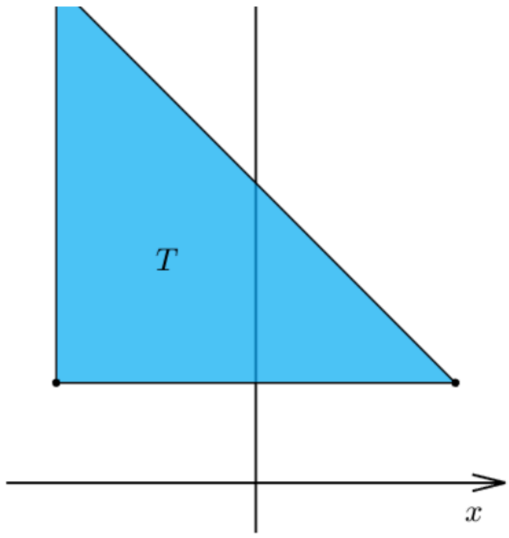
(b) Visa att

$$xw_x + yw_y = zw_z.$$

Totalpoäng: 3

Lösning >

3. Extremvärden på triangel



aximi- och minimivärdet av funktionen
$1 + xy - 2x + y$
ngulära området T med hörn i punkterna $(-2, 1)$, $(2, 1)$ och $(-2, 5)$ (se figur

Bestäm maximi- och minimivärdet av funktionen

$$f(x, y) = 1 + xy - 2x + y$$

på det triangulära området T med hörn i punkterna $(-2, 1)$, $(2, 1)$ och $(-2, 5)$ (se figur).

Totalpoäng: 4

Lösning >

4. Dubbelintegral med byte av integrationsordning

Låt D beteckna det område i $\mathbb{R}^2$ som definieras av

$$D: \quad \frac{\sqrt{x}}{2} \leq y \leq 1, \quad x \geq 0.$$

(a) Skissa området D i xy-planet och beräkna arean av D. *(2 p)*

(b) Beräkna integralen

$$\iint_D e^{y^3}\,dA.$$

Tips: Integrera x först, sedan y. *(3 p)*

Totalpoäng: 5

Lösning >

5. Volym av ett område i $\mathbb{R}^3$

Låt U beteckna det område i $\mathbb{R}^3$ som definieras av

$$U: \quad \begin{cases} 0 \le z \le 1 - y^2 \\ 0 \le x \le 2 - y - z \end{cases}$$

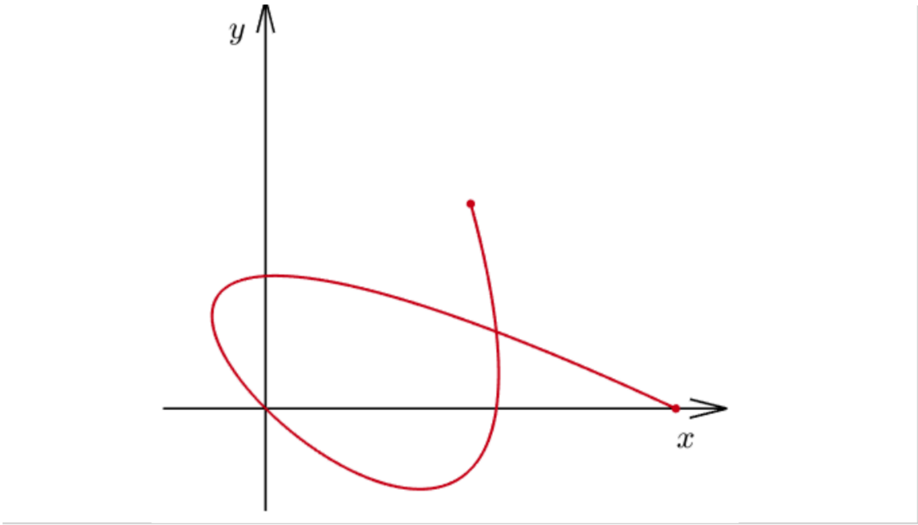
(a) Låt $P = (x, y, z)$ vara en godtycklig punkt i området U. Bestäm största och minsta värdet som P:s y-koordinat kan anta.

(b) Beräkna volymen av området U.

Totalpoäng: 5

Lösning >

6. Kurvintegraler – direkt och via potential



C beteckna den orienterade kurva i $\mathbb{R}^2$ (se figur ovan) som definieras av parametriseringen

$$\begin{cases} x = 4t^3 + 3t^2 - 3t \\ y = -4t^3 + t^2 + 3t \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

Låt C beteckna den orienterade kurva i $\mathbb{R}^2$ (se figur ovan) som definieras av parametriseringen

$$C: \quad \begin{cases} x = 4t^3 + 3t^2 - 3t \\ y = -4t^3 + t^2 + 3t \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

(a) Ange kurvans startpunkt och slutpunkt. Skissa kurvans orientering med ledning av figuren. *(1 p)*

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C (x+y)\,dy. \quad (2\text{ p})$$

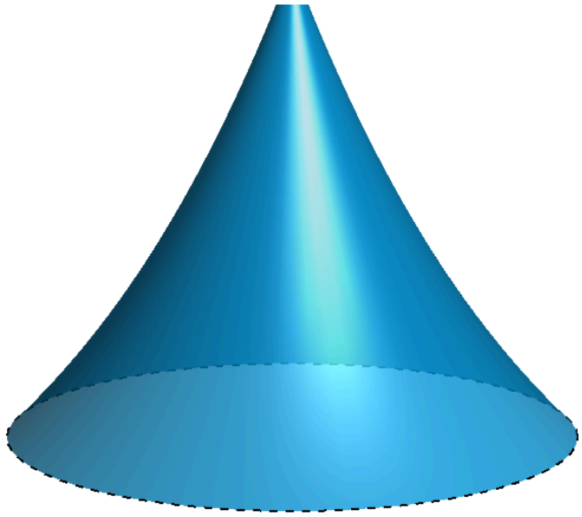
(c) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \ln(1+e^y)\,dx + \frac{xe^y}{1+e^y}\,dy. \quad (2\text{ p})$$

Totalpoäng: 5

Lösning >

7. Flöde genom parametriserad tältduk



skinlig tältduk (se figur) har formen av en parametriserad yta
$s\cos t$
$s\sin t \quad (0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi).$
$3e^{-s}$

ı det orienterade ytelementet $\hat{\mathbf{N}}\,dS$ om tältduken är orienterad så att
nalen har positiv z-komponent. (2 p)

En genomskinlig tältduk har formen av en parametriserad yta

$$Y: \quad \begin{cases} x = s\cos t \\ y = s\sin t \\ z = 3e^{-s} \end{cases} \qquad (0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi).$$

(a) Bestäm det orienterade ytelementet $\hat{\mathbf{N}}\,dS$ om tältduken är orienterad så att enhetsnormalen har positiv z-komponent. *(2 p)*

(b) En vind blåser med hastigheten

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

genom tältduken. Bestäm flödet av $\mathbf{F}$ genom Y. *(3 p)*

Totalpoäng: 5

Lösning >

Se även

- M0068M — kursfilen
- Tangentplan — uppgift 1
- Kedjeregeln för flera variabler — uppgift 2
- Extremvärdesproblem — uppgift 3
- Dubbelintegraler — uppgift 4
- Volymberäkningar med trippelintegraler — uppgift 5
- Konservativa vektorfält — uppgift 6
- Flödesintegraler — uppgift 7
- konventioner-tentor — formatkontraktet