

M0068M-2025-05-28

Jun 03, 2026, 13 min read

#tenta

#matematik

#flervariabelanalys

Kurs: M0068M – Flervariabelanalys **Datum:** 2025-05-28 **Examinator:** Thomas Strömberg **Källa:** originaltentamen med lösningsförslag

📄 Översikt

Sju uppgifter som täcker hela kursen: tangentplan och kryssprodukt (1), kritiska punkter och Hessian (2), Lagrange via parametrisering (3), dubbelintegral över ett delat triangulärt område (4), volym genom skivning (5), kurvintegraler – direkt och via potential (6), och flöde genom halvsfär via Gauss (7). Räknat efter modul: M1·1 – M2·2 – M3·2 – M4·1 – M5·1.

1. Tangentplan och tangentvektor till skärningskurva

Låt P beteckna den punkt i \mathbb{R}^3 som har koordinaterna $(2, 1, -1)$.

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ellipsoiden $x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 10$ i punkten P .

(b) Låt C beteckna skärningskurvan mellan ellipsoiden i (a) och planet $x + 2y + 4z = 0$. Bestäm en tangentvektor till C i punkten P .

Totalpoäng: 3

📄 Lösning >

2. Klassificera kritiska punkter

Bestäm och klassificera de **kritiska punkterna** till

$$f(x, y) = x^3 + x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Totalpoäng: 4

[✎ Lösning >](#)

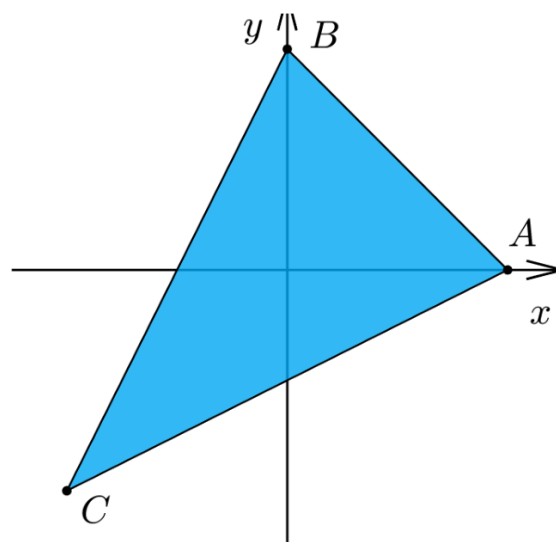
3. Optimering på en ellips

Bestäm maximum och minimum av $f(x, y) = x + y$ under bivillkoret $x^2 + 4y^2 = 4$.

Totalpoäng: 3

[✎ Lösning >](#)

4. Dubbelintegraler över ett triangulärt område



Låt T beteckna det triangulära område i \mathbb{R}^2 vars hörn ligger i punkterna $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ och $C = (-1, -1)$.

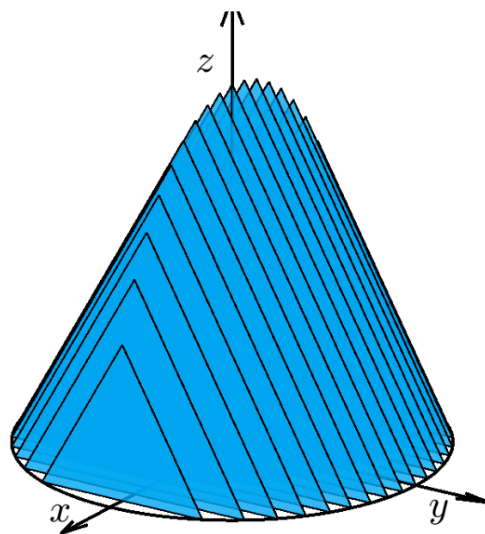
(a) Beräkna integralen $\iint_T x^2 dA$. (4 p)

(b) Beräkna integralen $\iint_T y^2 dA$. (1 p)

Totalpoäng: 5

[✎ Lösning >](#)

5. Volym av tält genom skivning



Ett tält står rest på en cirkulär basyta $x^2 + y^2 \leq a^2$ med radie $a > 0$. Om man skivar tältet i x -led, så har varje tvärsnitt i plan parallella med yz -planet formen av en liksidig triangel.

(a) Vad är arean av en liksidig triangel? Antag att sidlängden är L och uttryck svaret i L .

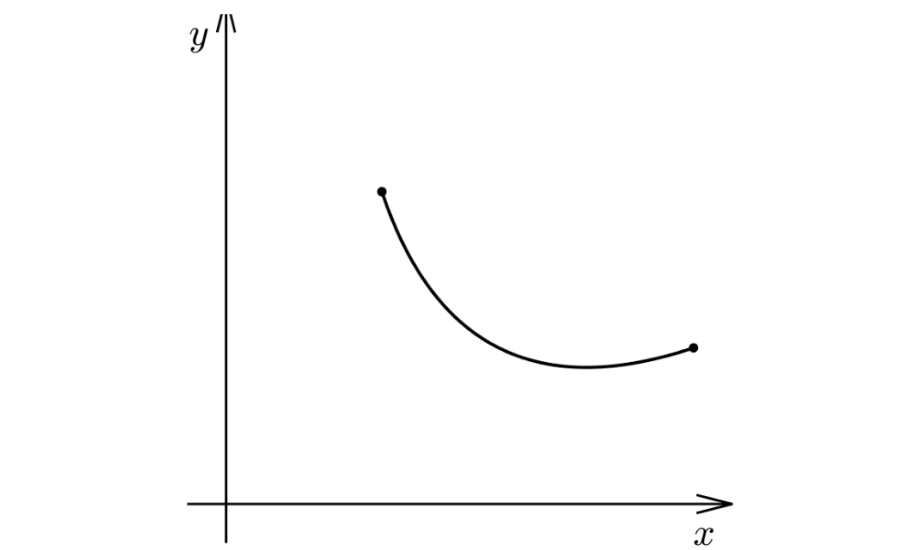
(b) Av figuren framgår att tvärsnittens storlek beror av x . Uttryck sidlängden L som en funktion av x .

(c) Beräkna tältets volym.

Totalpoäng: 5

[Lösning >](#)

6. Kurvintegraler längs parametriserad kurva



Låt C beteckna parameterkurvan i första kvadranten som definieras av

$$C : \begin{cases} x = t^2 - 3t + 3 \\ y = 2t^2 - t + 1 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

genomlöst från $t = 0$ till $t = 1$.

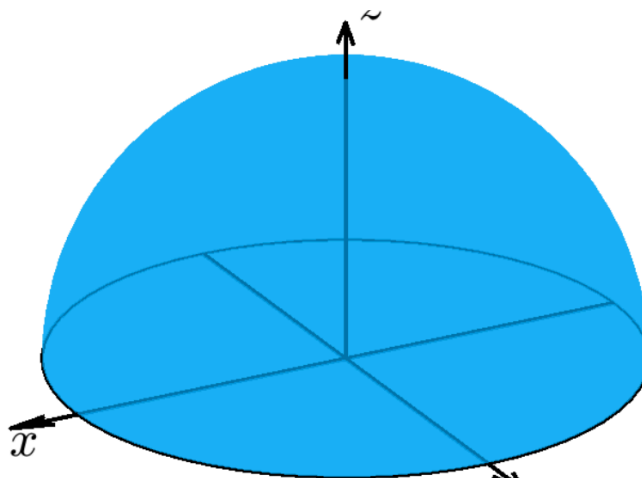
(a) Beräkna kurvintegralen $\int_C x \, dy$.

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_C \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$.

Totalpoäng: 5

[Lösning >](#)

7. Flöde genom halvsfär – Gauss sats med slutning



Låt \vec{F} beteckna vektorfältet

$$\vec{F}(x, y, z) = x^3 \hat{i} + y^3 \sin z \hat{j} + 3y^2 \cos z \hat{k}.$$

(a) Beräkna divergensen av \vec{F} . (1 p)

(b) Bestäm flödet av \vec{F} genom halvsfären $Y : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, om Y är orienterad så att enhetsnormalen pekar bort från origo. (4 p)

Totalpoäng: 5

[✎ Lösning >](#)

Se även

- [M0068M](#) – kursfilen, för översikt över examinationen.
- [Tangentplanets ekvation](#) – uppgift 1.
- [Kritiska punkter](#), [Extremvärdesproblem](#) – uppgift 2 och 3.
- [Lagranges multiplikatormetod](#) – alternativ metod för uppgift 3.
- [Dubbelintegraler](#) – uppgift 4.
- [Trippelintegraler](#) – uppgift 5.
- [Kurvintegraler av vektorfält](#) – uppgift 6.

- Gauss sats, Divergens och rotation — uppgift 7.
-