

M0065M-övningstenta

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** — (övningstenta, odaterad) **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0065m_ovntenta.pdf, m0065m_ovntentasols.pdf)

Översikt

- Uppgift 1: olikhet med absolutbelopp och rationell ekvation
- Uppgift 2: exponentialekvation via hjälpvariabel och trigonometrisk ekvation via hjälpvinkel
- Uppgift 3: tre gränsvärden: $\tan$ -kvot, absolutbelopp och exponentialfunktioner
- Uppgift 4: bestäm k så att e^x och $\sqrt{x+k}$ tangerar varandra, och den gemensamma tangenten
- Uppgift 5: kurvundersökning av $\frac{x^3 - 2x^2}{(x+1)^2}$ med extremvärden, inflexionspunkt, asymptoter och värdemängd
- Uppgift 6: invers, taylorpolynom för $\ln \frac{1+x}{1-x}$ och en approximation av $\ln 2$

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Olikhet med absolutbelopp och rationell ekvation

För vilka x är

(a) olikheten

$$x + |x - 3| \geq |x + 1| + 1$$

uppfylld? (3p)

(b) ekvationen

$$\frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 - 1} - \frac{x + 3}{x - 1} = x - \frac{x + 2}{x + 1}$$

uppfylld? (2p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1

(a) är en olikhet med absolutbelopp som delas upp i fall (**Funktioner**); (b) är en rationell ekvation som skrivs på gemensamt bråkstreck och faktoriseras (**Polynom och faktorisering**).

 Ledtråd 2

(a) Beloppen byter uttryck vid $x = -1$ och $x = 3$, så undersök tre intervall. (b) Notera att $x \neq \pm 1$, flytta allt till ena sidan och använd den gemensamma nämnaren $(x - 1)(x + 1)$.

 Ledtråd 3

(a) För $-1 \leq x < 3$ blir olikheten $3 \geq x + 2$. (b) Täljaren blir $-x^3 + x^2 + 2x = -x(x + 1)(x - 2)$.

 Lösning

(a) $|x - 3| = x - 3$ för $x \geq 3$ och $3 - x$ annars; $|x + 1| = x + 1$ för $x \geq -1$ och $-x - 1$ annars.

- $x \geq 3: x + (x - 3) \geq (x + 1) + 1 \iff 2x - 3 \geq x + 2 \iff x \geq 5.$
- $-1 \leq x < 3: x + (3 - x) \geq (x + 1) + 1 \iff 3 \geq x + 2 \iff x \leq 1$, alltså $-1 \leq x \leq 1.$
- $x < -1: x + (3 - x) \geq (-x - 1) + 1 \iff 3 \geq -x \iff x \geq -3$, alltså $-3 \leq x < -1.$

$$\boxed{-3 \leq x \leq 1 \text{ eller } x \geq 5}$$

(b) Uttrycket är odefinierat för $x = \pm 1$. Allt på ena sidan och gemensam nämnare $(x - 1)(x + 1)$:

$$\frac{(x^2 + 4x + 5) - (x + 3)(x + 1) + (x + 2)(x - 1) - x(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = 0$$

Täljaren är

$$x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 3) + (x^2 + x - 2) - (x^3 - x) = -x^3 + x^2 + 2x = -x(x + 1)(x - 2)$$

Den är noll för $x = 0$, $x = -1$ och $x = 2$, men $x = -1$ är förbjudet:

$$x = 0 \text{ eller } x = 2$$

Kontrollerat mot facit.

2. Exponentialekvation och trigonometrisk ekvation

Finn alla lösningar x till ekvationerna

(a)

$$2^{x+1} - 2^{5-x} = 12.$$

(2p)

(b)

$$2 \sin 2x + \sqrt{12} \cos 2x = 2.$$

(3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är en ekvation med **exponentialfunktioner** som blir en andragradsekvation; (b) är en **trigonometrisk ekvation** där **sin** och **cos** slås ihop till en enda sinusfunktion.

Ledtråd 2

(a) Skriv $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ och $2^{5-x} = \frac{32}{2^x}$, och sätt $t = 2^x > 0$. (b) Dela med 2 och skriv $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = A \sin(2x + \varphi)$ med additionsformeln (**Trigonometri**).

Ledtråd 3

(a) $t^2 - 6t - 16 = 0$. (b) $A = 2$ och $\varphi = \frac{\pi}{3}$, så ekvationen blir $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

 Lösning

(a) Med $t = 2^x > 0$:

$$2t - \frac{32}{t} = 12 \iff 2t^2 - 12t - 32 = 0 \iff t^2 - 6t - 16 = (t+2)(t-8) = 0$$

Eftersom $t > 0$ återstår $t = 8 = 2^3$:

$$\boxed{x = 3}$$

(b) Division med 2 ger $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 1$. Sök A och φ med

$$A \sin(2x + \varphi) = (A \cos \varphi) \sin 2x + (A \sin \varphi) \cos 2x$$

alltså $A \cos \varphi = 1$ och $A \sin \varphi = \sqrt{3}$. Kvadrering och addition ger $A^2 = 4$, så $A = 2$, $\cos \varphi = \frac{1}{2}$

och $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dvs. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Ekvationen blir

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ eller } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

dvs. $2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ eller $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$:

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{12} + \pi n \text{ eller } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 2x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3x + 1| - |2x - 6|}{x - 1}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{4^x - 1}.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Alla tre är **gränsvärden** av typen $\frac{0}{0}$ som ska förenklas algebraiskt.

Ledtråd 2

(a) Skriv $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ och använd $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ (**Trigonometri**). (b) Nära $x = 1$ är $3x + 1 > 0$ och $2x - 6 < 0$, så beloppen kan tas bort. (c) Skriv $6^x = 2^x \cdot 3^x$ och $4^x = (2^x)^2$ (**Exponentialfunktioner och logaritmer**).

Ledtråd 3

(a) Kvoten blir $\frac{\cos 2x}{2 \cos^2 x}$. (b) Täljaren blir $5(x - 1)$. (c) Faktorn $2^x - 1$ finns i både täljare och nämnare.

Lösning

(a)

$$\frac{\tan x}{\tan 2x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos 2x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{2 \cos^2 x} \rightarrow \frac{1}{2}$$

(b) För $-\frac{1}{3} < x < 3$ är $|3x + 1| = 3x + 1$ och $|2x - 6| = 6 - 2x$. Eftersom $x \rightarrow 1$ ligger x i det intervallet:

$$\frac{(3x + 1) - (6 - 2x)}{x - 1} = \frac{5(x - 1)}{x - 1} = 5$$

(c)

$$\frac{6^x - 3^x}{4^x - 1} = \frac{2^x \cdot 3^x - 3^x}{(2^x)^2 - 1} = \frac{(2^x - 1) \cdot 3^x}{(2^x - 1)(2^x + 1)} = \frac{3^x}{2^x + 1} \rightarrow \frac{3^0}{2^0 + 1} = \frac{1}{2}$$

Kontrollerat mot facit.

4. Tangerande kurvor e^x och $\sqrt{x+k}$

Låt $k > 0$ och definiera

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \sqrt{x+k}, \quad \text{för } x \geq -k.$$

(a) Finn det k som gör att funktionerna f och g tangerar varandra i en punkt. (4p) **Ledning:** två funktioner tangerar varandra om de i en skärningspunkt $x = a$ har samma tangent.

(b) Bestäm funktionernas gemensamma tangent för detta värde på k . (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Två kurvor tangerar varandra när både funktionsvärdena och **derivatorna** är lika i samma punkt (**Elementära funktioners derivator**).

Ledtråd 2

Ställ upp systemet $f(a) = g(a)$ och $f'(a) = g'(a)$, dvs. $e^a = \sqrt{a+k}$ och $e^a = \frac{1}{2\sqrt{a+k}}$. Att f är konvex och g konkav (**Andraderivata och konvexitet**) gör att det finns precis ett sådant k .

Ledtråd 3

Sätt de två högerleden lika: $\sqrt{a+k} = \frac{1}{2\sqrt{a+k}}$ ger $a+k = \frac{1}{2}$.

 Lösning

(a) $f'(x) = e^x > 0$, $f''(x) = e^x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+k}} > 0$ och $g''(x) = -\frac{1}{4(x+k)^{3/2}} < 0$. Båda är växande, f är konvex och g konkav, så det finns precis ett k där kurvorna tangerar varandra.

Tangering i $x = a$ kräver $f(a) = g(a)$ och $f'(a) = g'(a)$:

$$e^a = \sqrt{a+k}, \quad e^a = \frac{1}{2\sqrt{a+k}}$$

Alltså $\sqrt{a+k} = \frac{1}{2\sqrt{a+k}}$, dvs. $a+k = \frac{1}{2}$. Då är $e^a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, så

$$a = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\ln 2}{2}, \quad k = \frac{1}{2} - a = \frac{1 + \ln 2}{2}$$

$$\boxed{k = \frac{1 + \ln 2}{2}}$$

Tangeringspunkten är $(-\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(b) Lutningen är $f'(a) = e^a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Enpunktsformeln ger

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{\ln 2}{2}\right) \iff \boxed{y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + 1 + \frac{\ln 2}{2}\right)}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvundersökning av en rationell funktion

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Ange funktionens värdemängd V_f . Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: asymptoter, **extremvärden** med teckenschema för f' och inflexionspunkter med teckenschema för f'' (**Andraderivata och konvexitet**).

Ledtråd 2

Polynomdivision ger den sneda asymptoten. Nämnaren är noll i $x = -1$, vilket ger en lodrät asymptot. Derivera med kvotregeln och förkorta med $x + 1$.

Ledtråd 3

$$f(x) = x - 4 + \frac{7x + 4}{(x + 1)^2}, f'(x) = \frac{x(x + 4)(x - 1)}{(x + 1)^3} \text{ och } f''(x) = \frac{14x - 4}{(x + 1)^4}.$$

Lösning

Asymptoter. Polynomdivision ger

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 2x + 1} = x - 4 + \frac{7x + 4}{(x + 1)^2}$$

och $\frac{7x + 4}{(x + 1)^2} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$. Alltså är $y = x - 4$ sned asymptot åt båda hållen. I $x = -1$ går täljaren mot -3 och nämnaren mot 0^+ , så

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = -\infty$$

och $x = -1$ är lodrät asymptot. Vågrät asymptot saknas.

Derivata. Kvotregeln och förkortning med $x + 1$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x)(x + 1) - 2(x^3 - 2x^2)}{(x + 1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{(x + 1)^3} = \frac{x(x + 4)(x - 1)}{(x + 1)^3}$$

Kritiska punkter: $x = -4, 0$ och 1 .

	$x < -4$	-4	$-4 < x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0
x	–	–	–	–	–	0
$x + 4$	–	0	+	+	+	+
$x - 1$	–	–	–	–	–	–
$(x + 1)^3$	–	–	–	0	+	+
$f'(x)$	+	0	–	odef.	+	0
$f(x)$	↗	lok. max	↘	asymptot	↗	lok.

$$f(-4) = \frac{-64 - 32}{9} = -\frac{32}{3}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1 - 2}{4} = -\frac{1}{4}$$

Andraderivata.

$$f''(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 4)(x + 1) - 3(x^3 + 3x^2 - 4x)}{(x + 1)^4} = \frac{14x - 4}{(x + 1)^4} = \frac{14(x - \frac{2}{7})}{(x + 1)^4}$$

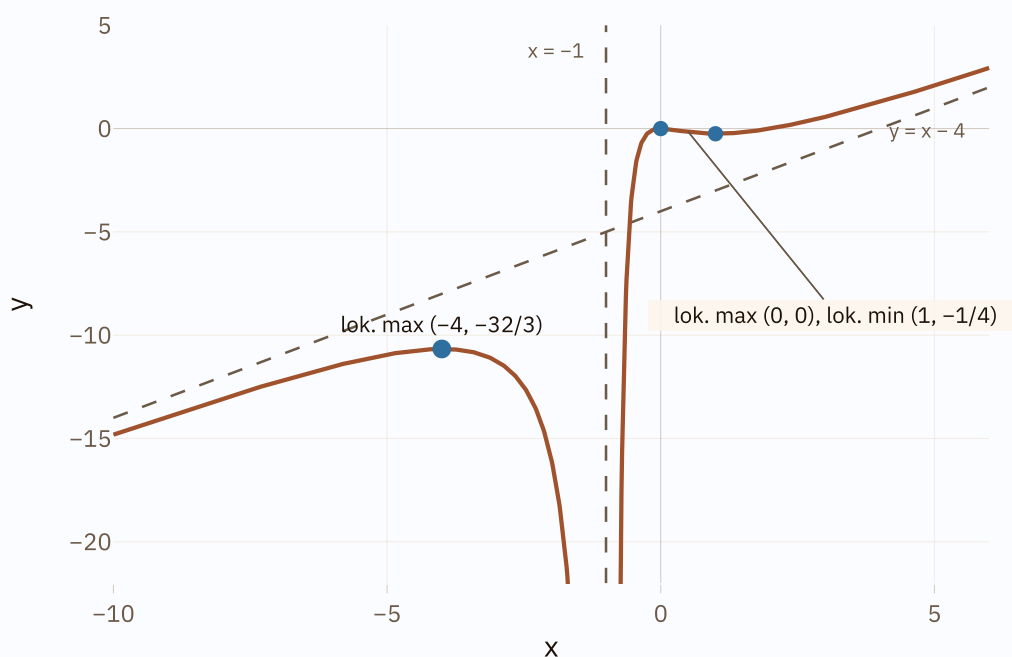
	$x < -1$	-1	$-1 < x < \frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$x > \frac{2}{7}$
$14(x - \frac{2}{7})$	–	–	–	0	+
$(x + 1)^4$	+	0	+	+	+
$f''(x)$	–	odef.	–	0	+
$f(x)$	konkav	asymptot	konkav	infl.	konvex

$$f(\frac{2}{7}) = -\frac{16}{189}.$$

Värdemängd. f är kontinuerlig på $(-1, \infty)$ med $f \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -1^+$ och $f \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$, så redan där antas alla reella värden.

$$\begin{aligned} &\text{lok. max } f(-4) = -\frac{32}{3} \text{ och } f(0) = 0, \quad \text{lok. min } f(1) = -\frac{1}{4} \\ &\text{inflexionspunkt } (\frac{2}{7}, -\frac{16}{189}) \\ &\text{asymptoter } x = -1 \text{ och } y = x - 4 \\ &V_f = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Skiss.



Kontrollerat mot facit.

6. Taylorpolynom och en approximation av $\ln 2$

Sätt $x \in (-1, 1)$ och definiera

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

(a) Vad är

$$f^{-1}(\ln 2)?$$

(1p)

(b) Finn tredje ordningens taylorpolynom $P_3(x)$ till $f(x)$ kring punkten 0. Lagranges restterm behöver ej bestämmas. (3p)

(c) Använd taylorpolynomet P_3 du funnit ovan i lämplig punkt för att finna ett approximativt värde av $\ln 2$. **Ledning:** Uppgift 6.(a). (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) handlar om **inversen**; (b) och (c) är **Taylors formel**.

Ledtråd 2

(a) $y = f^{-1}(\ln 2)$ betyder $f(y) = \ln 2$. (b) Beräkna f' , f'' och f''' i 0 och sätt in i $P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$.

Ledtråd 3

(a) $\frac{1+y}{1-y} = 2$. (b) $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$, vilket gör de högre derivatorna enkla. (c) $\ln 2 = f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Lösning

(a) $y = f^{-1}(\ln 2)$ betyder

$$\ln \frac{1+y}{1-y} = \ln 2 \iff 1+y = 2(1-y) \iff y = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{f^{-1}(\ln 2) = \frac{1}{3}}$$

(b) Med $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}, \quad f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

I $x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 0$ och $f'''(0) = 4$. Alltså

$$P_3(x) = 0 + 2x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{4}{6}x^3 \implies \boxed{P_3(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3}$$

(c) Enligt (a) är $\ln 2 = f\left(\frac{1}{3}\right)$, och $\frac{1}{3}$ ligger nära 0:

$$\ln 2 \approx P_3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{27} = \frac{54+2}{81}$$

$$\ln 2 \approx \frac{56}{81}$$

Anmärkning: Lagranges restterm med $f^{(4)}(x) = \frac{48x(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$, som är växande på $[0, 1)$, ger felet högst $\frac{f^{(4)}(1/3)}{4! \cdot 3^4} = \frac{15}{2^{10}} \approx 0,015$. Det verkliga felet är ungefär 0,0018.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Funktioner](#)
- [Polynom och faktorisering](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Trigonometri](#)
- [Trigonometriska ekvationer](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Derivata](#)
- [Elementära funktioners derivator](#)
- [Extremvärden](#)
- [Andraderivata och konvexitet](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Taylors formel](#)