

M0065M-2025-12-18

19 okt. 2026, 10 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2025-12-18 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0065m_251218.pdf, m0065m_251218sols.pdf)

Översikt

- polynomekvation med gissad rot och rotekvation (1)
- logaritmekvation och trigonometrisk ekvation (2)
- tre gränsvärden utan l'Hôpital (3)
- tangent till en implicit given kurva (4)
- kurvundersökning av $((\ln x)^2 - 1)/x$ (5)
- oljefläckens tjocklek, sammanhängande förändringshastigheter (6)

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Polynomekvation och rotekvation

För vilka $x \in \mathbb{R}$ är

(a) ekvationen

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

uppfyllt? *Ledning:* gissa en rot på lämpligt sätt. (3p)

(b) ekvationen

$$\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-2} = 1$$

uppfylld? (2p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1

(a) är en tredjegrads ekvation: hitta en rot och **faktorisera**. (b) är en rotekvation som löses genom kvadrering.

 Ledtråd 2

(a) En heltalsrot måste dela konstanttermen -4 : prova $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. (b) Flytta över en rot, kvadrera, isolera den kvarvarande roten och kvadrera igen. Pröva alltid rötterna i den ursprungliga ekvationen.

 Ledtråd 3

(a) $x = -2$ är en rot, så $x + 2$ är en faktor. (b) Efter första kvadreringen får du $6 - x = 2\sqrt{3x - 2}$, vilket kräver $x \leq 6$.

 Lösning

(a) Insättning av $x = -2$ ger $-8 + 8 + 4 - 4 = 0$, så $x + 2$ är en faktor:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = x^2(x + 2) - 2(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 2)$$

$$\boxed{x = -2 \quad \text{eller} \quad x = \pm\sqrt{2}}$$

(b) Villkor: $x \geq 2/3$. Skriv $\sqrt{2x + 5} = 1 + \sqrt{3x - 2}$ och kvadrera:

$$2x + 5 = 1 + 2\sqrt{3x - 2} + 3x - 2 \iff 6 - x = 2\sqrt{3x - 2}$$

Kvadrera igen:

$$36 - 12x + x^2 = 12x - 8 \iff x^2 - 24x + 44 = 0 \iff x = 2 \text{ eller } x = 22$$

Prövning: $x = 2$ ger $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$, som stämmer. $x = 22$ ger $\sqrt{49} - \sqrt{64} = -1 \neq 1$ och är en falsk rot (där är $6 - x < 0$).

$$\boxed{x = 2}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Logaritmekvation och trigonometrisk ekvation

Finn alla lösningar x till ekvationerna

(a)

$$\frac{\lg(6x - 5)}{\lg(2x - 1)} = 2$$

Anmärkning: $\lg t = \log_{10} t = {}^{10}\log t$ (2p)

(b)

$$\cos 3x = \sin 4x$$

(3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är en **logaritmekvation**, (b) en **trigonometrisk ekvation**.

Ledtråd 2

(a) Bestäm först definitionsmängden: båda argumenten positiva och nämnaren $\neq 0$. Använd sedan $2 \lg a = \lg a^2$. (b) Skriv om sinus som cosinus med $\sin v = \cos(\frac{\pi}{2} - v)$ (**Trigonometri**).

Ledtråd 3

(a) Ekvationen blir $6x - 5 = (2x - 1)^2$, men $x = 1$ ger $\lg 1 = 0$ i nämnaren. (b) $\cos u = \cos v \iff u = \pm v + 2\pi n$.

Lösning

(a) Villkor: $6x - 5 > 0$, $2x - 1 > 0$ och $\lg(2x - 1) \neq 0$, dvs. $x > 5/6$ och $x \neq 1$. Då gäller

$$\lg(6x - 5) = 2 \lg(2x - 1) = \lg(2x - 1)^2 \iff 6x - 5 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 - 10x + 6 = 0 \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0 \iff x = 1 \text{ eller } x = \frac{3}{2}$$

$x = 1$ är inte tillåten. Kontroll: $x = 3/2$ ger $\lg 4 / \lg 2 = 2$.

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

(b) Eftersom $\sin 4x = \cos(\frac{\pi}{2} - 4x)$ blir ekvationen

$$\cos 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - 4x) \iff 3x = \pm(\frac{\pi}{2} - 4x) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Plustecknet: $7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, dvs. $x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}$.

Minustecknet: $3x = -\frac{\pi}{2} + 4x + 2\pi n$, dvs. $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n$, vilket är samma mängd som $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

$$\boxed{x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning skriver $x = \frac{\pi}{14} - \frac{2\pi n}{7}$ och $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n$; eftersom n genomlöper hela $\mathbb{Z}$ är det samma lösningsmängd.

3. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\cos 2x}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + 9x}).$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^3 - 8}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) Funktionen är **kontinuerlig** i 0. (b) är ett **oegentligt gränsvärde** av typen $-\infty + \infty$. (c) är ett **gränsvärde** av typen $0/0$.

Ledtråd 2

(a) Sätt in $x = 0$. (b) Förläng med konjugatet $2x - \sqrt{4x^2 + 9x}$. (c) Faktorisera täljare och nämnare; båda har faktorn $x - 2$.

Ledtråd 3

(b) För $x < 0$ är $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, så $\sqrt{4x^2 + 9x} = -x\sqrt{4 + 9/x}$. (c) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

Lösning

(a) Täljare och nämnare är kontinuerliga och $\cos 0 = 1 \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\cos 2x} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

(b) Förläng med konjugatet:

$$2x + \sqrt{4x^2 + 9x} = \frac{4x^2 - (4x^2 + 9x)}{2x - \sqrt{4x^2 + 9x}} = \frac{-9x}{2x - \sqrt{4x^2 + 9x}}$$

För $x < 0$ är $\sqrt{4x^2 + 9x} = |x|\sqrt{4 + 9/x} = -x\sqrt{4 + 9/x}$, så nämnaren blir $x(2 + \sqrt{4 + 9/x})$ och

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9x}{x(2 + \sqrt{4 + 9/x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{2 + \sqrt{4 + 9/x}} = \frac{-9}{2 + 2} = \boxed{-\frac{9}{4}}$$

(c)

$$\frac{2x^2 - 8}{x^3 - 8} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{2(x+2)}{x^2 + 2x + 4} \rightarrow \frac{2 \cdot 4}{4 + 4 + 4} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

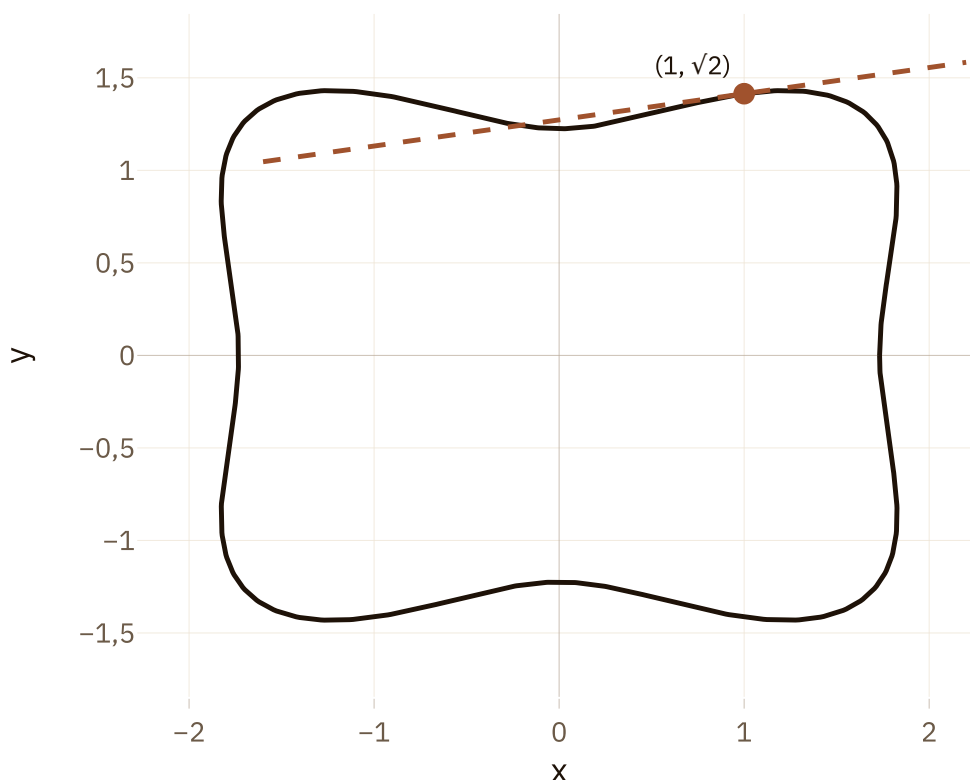
Kontrollerat mot facit.

4. Tangent till en implicit kurva

Ekvationen

$$x^4 + 2y^4 = 3(x^2 + y^2), \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

definierar en sluten slät kurva i planet, se nedanstående figur. Finn ekvationen för tangenten till kurvan i punkten $(1, \sqrt{2})$. (5p)



Figuren är omritad efter originalet; tangenten i $(1, \sqrt{2})$ är inritad och hör till lösningen.

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvan är inte en graf $y = f(x)$ överallt; använd **implicit derivering**.

Ledtråd 2

Derivera båda leden med avseende på x och kom ihåg att $\frac{d}{dx} y^n = ny^{n-1}y'$. Lös ut y' .
Tangenten är $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Ledtråd 3

$$y' = \frac{3x - 2x^3}{4y^3 - 3y}. \text{ Sätt in } x = 1, y = \sqrt{2}.$$

Lösning

Punkten ligger på kurvan: $1 + 2 \cdot 4 = 9 = 3(1 + 2)$.

Implicit derivering:

$$4x^3 + 8y^3y' = 6x + 6yy' \iff y'(8y^3 - 6y) = 6x - 4x^3 \iff y' = \frac{3x - 2x^3}{4y^3 - 3y}$$

I $(1, \sqrt{2})$ är $y^3 = 2\sqrt{2}$:

$$y' = \frac{3 - 2}{8\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Tangenten:

$$y = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{10}(x - 1) \iff \boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{10}(x + 9)}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvundersökning av $((\ln x)^2 - 1)/x$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{(\ln x)^2 - 1}{x}, \quad x > 0.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En klassisk **kurvundersökning**: asymptoter, **extremvärden** via teckenschema för f' och **inflexionspunkter** via f'' .

Ledtråd 2

Asymptoter: undersök $x \rightarrow 0^+$ och $x \rightarrow \infty$ (standardgränsvärdet $(\ln x)^k/x \rightarrow 0$). Derivera med **kvotregeln** och sätt $t = \ln x$.

Ledtråd 3

$f'(x) = -\frac{(\ln x)^2 - 2 \ln x - 1}{x^2}$ och $f''(x) = \frac{2 \ln x (\ln x - 3)}{x^3}$. Täljarna är andragradsuttryck i $t = \ln x$.

Lösning

Asymptoter. Då $x \rightarrow 0^+$ går $(\ln x)^2 - 1 \rightarrow +\infty$ och $1/x \rightarrow +\infty$, så $f(x) \rightarrow +\infty$: **lodrät asymptot** $x = 0$. Då $x \rightarrow \infty$ gäller $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{1}{x} \rightarrow 0$: **vågrät asymptot** $y = 0$. Nollställen: $\ln x = \pm 1$, dvs. $x = 1/e$ och $x = e$.

Derivata. Med $t = \ln x$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} \cdot x - ((\ln x)^2 - 1)}{x^2} = -\frac{t^2 - 2t - 1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \iff t = 1 \pm \sqrt{2}$, dvs. $x_1 = e^{1-\sqrt{2}}$ och $x_2 = e^{1+\sqrt{2}}$. Eftersom $t^2 - 2t - 1 = (t - (1 - \sqrt{2}))(t - (1 + \sqrt{2}))$:

x	0		$e^{1-\sqrt{2}}$		$e^{1+\sqrt{2}}$	
$\ln x - (1 - \sqrt{2})$		–	0	+		+
$\ln x - (1 + \sqrt{2})$		–		–	0	+
$-1/x^2$		–		–		–
$f'(x)$		–	0	+	0	–
$f(x)$	asy.	↘	lok. min	↗	lok. max	↘

Värdena, med $(1 \pm \sqrt{2})^2 - 1 = 2 \pm 2\sqrt{2}$:

$$f(e^{1-\sqrt{2}}) = 2(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1} \approx -1,25 \text{ (lokalt min)}$$

$$f(e^{1+\sqrt{2}}) = 2(1 + \sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}} \approx 0,43 \text{ (lokalt max)}$$

Andraderivata. Deriverar man $f'(x) = \frac{-t^2 + 2t + 1}{x^2}$ igen fås

$$f''(x) = \frac{(-2t + 2) \cdot x - 2x(-t^2 + 2t + 1)}{x^4} = \frac{2t^2 - 6t}{x^3} = \frac{2 \ln x (\ln x - 3)}{x^3}$$

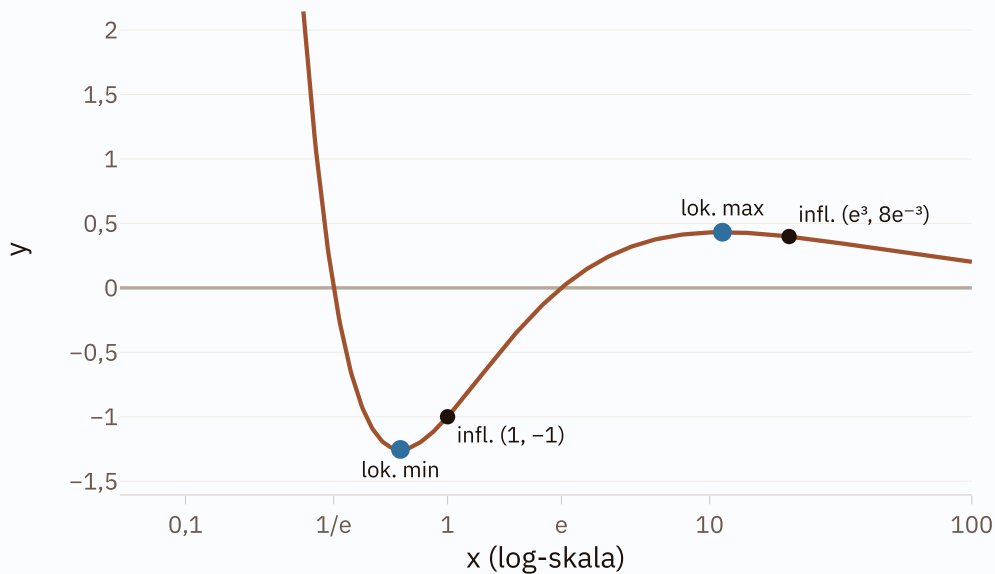
x	0		1		e^3	
$2 \ln x$		–	0	+		+
$\ln x - 3$		–		–	0	+
x^3		+		+		+
$f''(x)$		+	0	–	0	+
$f(x)$	asy.	konvex	infl.	konkav	infl.	ko

f'' byter tecken i båda punkterna:

Inflexionspunkter: $(1, -1)$ och $(e^3, 8e^{-3}) \approx (20,1; 0,40)$

Asymptoter: $x = 0$ ($f \rightarrow +\infty$) och $y = 0$ då $x \rightarrow \infty$

Skiss. Kurvan kommer ned från $+\infty$ längs y -axeln, skär x -axeln i $1/e$, når minimum $\approx -1,25$ vid $x \approx 0,66$, vänder uppåt genom inflexionspunkten $(1, -1)$, skär x -axeln i e , når maximum $\approx 0,43$ vid $x \approx 11,2$ och avtar sedan mot 0 genom inflexionspunkten vid $x = e^3$.



Kontrollerat mot facit.

6. Oljefläckens tjocklek

En viss oljefläck på havsytan har cirkulär form och samma tjocklek d över hela sin yta. Olja tillförs fläcken med $11 \text{ m}^3/\text{min}$ från ett läckage på ett sjunket fartyg. Vid en bestämd tidpunkt t_0 noteras att fläckens radie är $r = 100 \text{ m}$ och att radien ökar med 3 m/min samt att tjockleken är $d = 1/4 \text{ cm}$. Hur snabbt förändras fläckens tjocklek d vid denna tidpunkt? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Sammanhängande förändringshastigheter: volym, radie och tjocklek beror alla på tiden, och **derivatan** är förändringshastigheten.

Ledtråd 2

Fläcken är en tunn cylinder: $V = \pi r^2 d$. Derivera med avseende på t med **produktregeln**.

Ledtråd 3

$V' = 2\pi r r' d + \pi r^2 d'$. Använd meter överallt: $d = 0,0025$ m.

Lösning

Volymen är $V(t) = \pi r(t)^2 d(t)$, så

$$V'(t) = 2\pi r r' d + \pi r^2 d'$$

Vid t_0 är $V' = 11$, $r = 100$, $r' = 3$ och $d = 0,0025$ (meter och minuter):

$$11 = 2\pi \cdot 100 \cdot 3 \cdot 0,0025 + \pi \cdot 100^2 \cdot d' = 1,5\pi + 10^4 \pi d'$$

$$d'(t_0) = \frac{11 - 1,5\pi}{10^4 \pi} = \left(\frac{11}{\pi} - \frac{3}{2}\right) \cdot 10^{-4} \text{ m/min}$$

Med $\pi \approx 22/7$ blir $11/\pi \approx 3,5$ och

$$d'(t_0) \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ m/min} = \boxed{0,2 \text{ mm/min}}$$

Tjockleken **ökar** alltså med ungefär 0,2 mm/min.

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning anger 0,2 mm/min med $\pi \approx 22/7$ (räknare var inte tillåten); det exakta värdet $(11/\pi - 3/2) \cdot 10^{-4}$ m/min är $\approx 0,2001$ mm/min.

Se även

- M0065M
- Polynom och faktorisering
- Exponentialfunktioner och logaritmer
- Trigonometri
- Trigonometriska ekvationer
- Gränsvärden
- Oegentliga gränsvärden
- Kontinuitet
- Implicit derivering
- Derivata
- Deriveringsregler
- Extremvärden

- Andraderivata och konvexitet
 - Grafritning och asymptoter
-