

M0065M-2025-10-29

19 okt. 2026, 10 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2025-10-29 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0065m_251029.pdf, m0065m_251029sols.pdf)

Översikt

- Uppgift 1: rationell olikhet med teckenschema och ekvation med absolutbelopp
- Uppgift 2: logaritmekvation och trigonometrisk ekvation via dubbla vinkeln
- Uppgift 3: tre gränsvärden: dominerande termer, bestämning av en konstant och förlängning med konjugat
- Uppgift 4: tangenter till en parabel genom en punkt utanför kurvan
- Uppgift 5: extremvärden och asymptoter för $x^2(x-2)e^{-x}$ och antal lösningar till $f(x) = C$
- Uppgift 6: maximal area för en triangel under en tangent till e^{-x}

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Olikhet och ekvation med absolutbelopp

För vilka x är

(a) olikheten

$$x + 3 \leq \frac{4x - 2}{x - 2}$$

uppfylld? (3p)

(b) ekvationen

$$|2x + 2| - |x - 1| = x + 3$$

uppfyllt? (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är en rationell olikhet som löses med teckenschema (**Polynom och faktorisering**); (b) är en ekvation med absolutbelopp som delas upp i fall (**Funktioner**).

Ledtråd 2

(a) Multiplicera inte med $x - 2$, eftersom tecknet är okänt. Flytta allt till ena sidan och skriv på gemensamt bråkstreck. (b) Beloppen byter uttryck vid $x = -1$ och $x = 1$, så undersök tre intervall.

Ledtråd 3

(a) $x + 3 - \frac{4x - 2}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2} = \frac{(x + 1)(x - 4)}{x - 2}$. (b) För $x \geq 1$ blir vänsterledet $x + 3$ identiskt.

Lösning

(a) $x \neq 2$. Allt på ena sidan och gemensam nämnare:

$$\frac{(x + 3)(x - 2) - (4x - 2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2} = \frac{(x + 1)(x - 4)}{x - 2} \leq 0$$

Teckenschema med brytpunkterna -1 , 2 och 4 :

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	$2 < x < 4$	4
$x + 1$	−	0	+	+	+	+
$x - 2$	−	−	−	0	+	+
$x - 4$	−	−	−	−	−	0

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	$2 < x < 4$	4
kvot	–	0	+	odef.	–	0

$$x \leq -1 \text{ eller } 2 < x \leq 4$$

(b) $|2x + 2| = 2x + 2$ för $x \geq -1$ och $-2x - 2$ annars; $|x - 1| = x - 1$ för $x \geq 1$ och $1 - x$ annars.

- $x \geq 1$: $(2x + 2) - (x - 1) = x + 3$, vilket gäller för alla x i intervallet.
- $-1 \leq x < 1$: $(2x + 2) - (1 - x) = 3x + 1 = x + 3 \iff x = 1$, som inte ligger i intervallet.
- $x < -1$: $(-2x - 2) - (1 - x) = -x - 3 = x + 3 \iff x = -3$, som ligger i intervallet.

$$x = -3 \text{ eller } x \geq 1$$

Kontrollerat mot facit.

2. Logaritmekvation och trigonometrisk ekvation

Finn alla lösningar x till ekvationerna

(a)

$$\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) - \log_2(x - 4) = 2$$

Anmärkning: $\log_2 t = {}^2\log t$. (2p)

(b)

$$\cos 2x = 3 \cos x + 1$$

(3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är en ekvation med **logaritmer**; (b) är en **trigonometrisk ekvation** som blir en andragradsekvation.

Ledtråd 2

(a) Bestäm först var vänsterledet är definierat, slå sedan ihop med logaritmlagarna. (b) Skriv $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ (Trigonometri) och sätt $t = \cos x$.

Ledtråd 3

(a) $\frac{(x-5)(x+2)}{x-4} = 4$ med villkoret $x > 5$. (b) $2t^2 - 3t - 2 = 0$, och kom ihåg att $-1 \leq t \leq 1$.

Lösning

(a) Alla tre logaritmerna är definierade om $x > 5$. Då är

$$\log_2 \frac{(x-5)(x+2)}{x-4} = 2 \iff (x-5)(x+2) = 4(x-4) \iff x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6) = 0$$

Bara $x = 6$ uppfyller $x > 5$:

$$\boxed{x = 6}$$

(b) Med $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ och $t = \cos x$:

$$2t^2 - 1 = 3t + 1 \iff 2t^2 - 3t - 2 = 0 \iff t = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

alltså $t = 2$ eller $t = -\frac{1}{2}$. Eftersom $|\cos x| \leq 1$ återstår $\cos x = -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2^x}{x^2 - 4^x}$$

(1p)

(b) Bestäm konstanten a så att gränsvärdet existerar och är ändligt. Beräkna sedan gränsvärdet.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{5x-a}{x^2-4} \right)$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{10-3x} - \sqrt{x+2}}{x-2}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett **gränsvärde mot oändligheten** där exponentialfunktioner dominerar potenser; (b) och (c) är **gränsvärden** av typen $\frac{0}{0}$ som ska förenklas.

Ledtråd 2

(a) Bryt ut den snabbast växande termen, 4^x , i täljare och nämnare. (b) Skriv på gemensam nämnare $(x-2)(x+2)$. (c) Förläng med konjugatet $\sqrt{10-3x} + \sqrt{x+2}$.

Ledtråd 3

(b) Täljaren blir $4 + a - 3x$; för ett ändligt gränsvärde måste den vara noll i $x = 2$. (c) Täljaren blir $(10 - 3x) - (x + 2) = -4(x - 2)$.

Lösning

(a) Division med 4^x :

$$\frac{x^4 - 2^x}{x^2 - 4^x} = \frac{\frac{x^4}{4^x} - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{\frac{x^2}{4^x} - 1} \rightarrow \frac{0 - 0}{0 - 1} = \boxed{0}$$

eftersom en potens domineras av en exponentialfunktion.

(b) Gemensam nämnare:

$$\frac{2}{x-2} - \frac{5x-a}{x^2-4} = \frac{2(x+2) - (5x-a)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4+a-3x}{(x-2)(x+2)}$$

Nämnamnaren går mot 0 när $x \rightarrow 2$. Gränsvärdet kan bara bli ändligt om täljaren också går mot 0, alltså $4 + a - 6 = 0$, dvs. $a = 2$. Då är täljaren $6 - 3x = -3(x - 2)$ och

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{x+2} = -\frac{3}{4}$$

$a = 2, \quad \text{gränsvärdet} = -\frac{3}{4}$

(c) Förlängning med konjugatet:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{10-3x} - \sqrt{x+2}}{x-2} &= \frac{(10-3x) - (x+2)}{(x-2)(\sqrt{10-3x} + \sqrt{x+2})} = \frac{-4}{\sqrt{10-3x} + \sqrt{x+2}} \\ &\rightarrow \frac{-4}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = \boxed{-1} \end{aligned}$$

Kontrollerat mot facit.

4. Tangenter genom en punkt utanför parabeln

Finn alla tangenter till kurvan

$$y = f(x) = 3 + 4x - x^2$$

som går genom punkten (1, 10). **Ledning:** ligger punkten på kurvan?

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Tangentens ekvation med **derivatan** som lutning, men tangeringspunkten är okänd.

Ledtråd 2

$f(1) = 6 \neq 10$, så punkten ligger inte på kurvan. Låt tangeringspunkten vara $(a, f(a))$; tangenten är $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Ledtråd 3

Kräv att $(1, 10)$ ligger på tangenten. Det ger en andragradsekvation i a : $a^2 - 2a - 3 = 0$.

Lösning

$f(1) = 3 + 4 - 1 = 6 \neq 10$, så $(1, 10)$ är ingen tangeringspunkt. Låt tangeringspunkten vara $(a, f(a))$. Då är $f'(a) = 4 - 2a$ och enpunktsformeln ger

$$y = (3 + 4a - a^2) + (4 - 2a)(x - a) = (4 - 2a)x + a^2 + 3$$

Tangenten ska gå genom $(1, 10)$:

$$10 = (4 - 2a) + a^2 + 3 \iff a^2 - 2a - 3 = (a + 1)(a - 3) = 0$$

$a = -1$ (tangeringspunkt $(-1, -2)$) och $a = 3$ (tangeringspunkt $(3, 6)$) ger

$$y = 6x + 4 \quad \text{och} \quad y = 12 - 2x$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $x^2(x - 2)e^{-x}$

Definiera funktionen

$$y = f(x) = x^2(x - 2)e^{-x}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema. Skissera kurvan. Konvexitet behöver ej beaktas. (4p)

(b) Bestäm hur många olika lösningar ekvationen

$$x^2(x - 2)e^{-x} = C$$

har för alla värden på talet $C \in \mathbb{R}$. Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: gränsvärden i $\pm\infty$, derivata och teckenschema för **extremvärden**. (b) räknar skärningar med en vågrät linje (**Ekvationslösning med derivata**).

Ledtråd 2

f är definierad på hela $\mathbb{R}$, så det finns inga lodräta asymptoter. Undersök $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ och, åt vänster, $\lim f(x)/x$. Derivera $f = (x^3 - 2x^2)e^{-x}$ med produktregeln.

Ledtråd 3

$f'(x) = -x(x-1)(x-4)e^{-x}$. Jämför C med de lokala extremvärdena $f(0) = 0$, $f(1) = -1/e$ och $f(4) = 32/e^4$.

Lösning

(a) Asymptoter. f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$, så lodräta asymptoter saknas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(x-2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \frac{x^3}{e^x} = 0$$

eftersom exponentialfunktionen dominerar. Alltså är $y = 0$ vågrät asymptot åt höger. Åt vänster gäller $f(x) \rightarrow -\infty$ och

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x-2)e^{-x} = +\infty$$

så där finns ingen sned asymptot.

Derivata.

$$f'(x) = (3x^2 - 4x)e^{-x} - (x^3 - 2x^2)e^{-x} = (-x^3 + 5x^2 - 4x)e^{-x} = -x(x-1)(x-4)e^{-x}$$

Kritiska punkter: $x = 0, 1$ och 4 .

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 4$	4
$-x$	+	0	-	-	-	-
$x - 1$	-	-	-	0	+	+
$x - 4$	-	-	-	-	-	0
e^{-x}	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗	lok.

$$\text{lok. max } f(0) = 0 \text{ och } f(4) = \frac{32}{e^4}, \quad \text{lok. min } f(1) = -\frac{1}{e}$$

asymptot $y = 0$ då $x \rightarrow \infty$; inga andra asymptoter

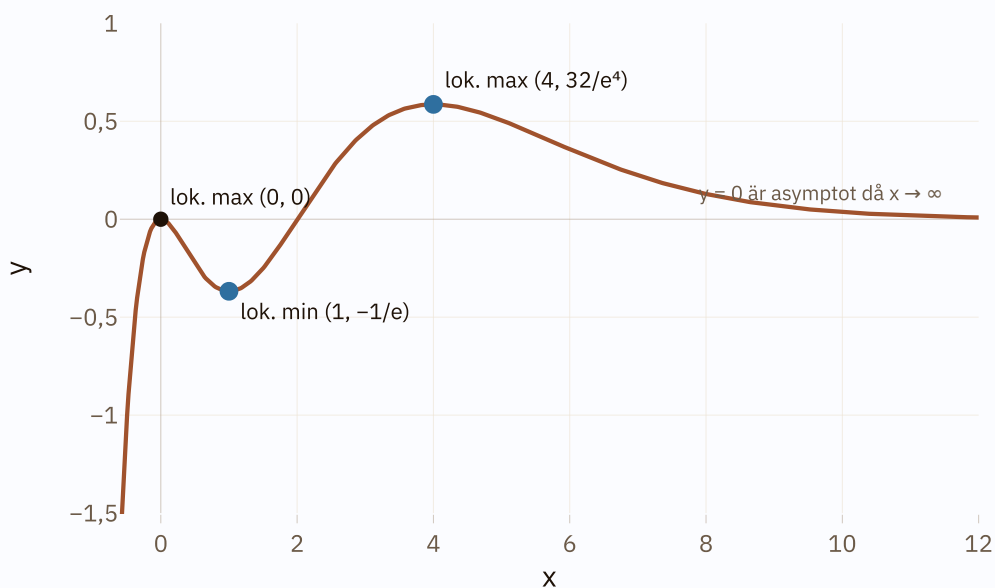
$f(4) = 32/e^4$ är globalt maximum; globalt minimum saknas eftersom $f \rightarrow -\infty$ åt vänster. Nollställena är $x = 0$ och $x = 2$, och $f(x) > 0$ bara för $x > 2$.

(b) Antalet lösningar är antalet skärningar mellan kurvan och linjen $y = C$. Ur teckenschemat och gränsvärdena ($-\frac{1}{e} < 0 < \frac{32}{e^4}$):

$C > \frac{32}{e^4}$:	ingen lösning
$C = \frac{32}{e^4}$:	en lösning ($x = 4$)
$0 \leq C < \frac{32}{e^4}$:	två lösningar
$-\frac{1}{e} < C < 0$:	tre lösningar
$C = -\frac{1}{e}$:	två lösningar
$C < -\frac{1}{e}$:	en lösning

För $C = 0$ är lösningarna $x = 0$ och $x = 2$; för $0 < C < 32/e^4$ en i $(2, 4)$ och en i $(4, \infty)$. För $-1/e < C < 0$ finns en lösning i vardera $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 2)$.

Skiss.



Kontrollerat mot facit.

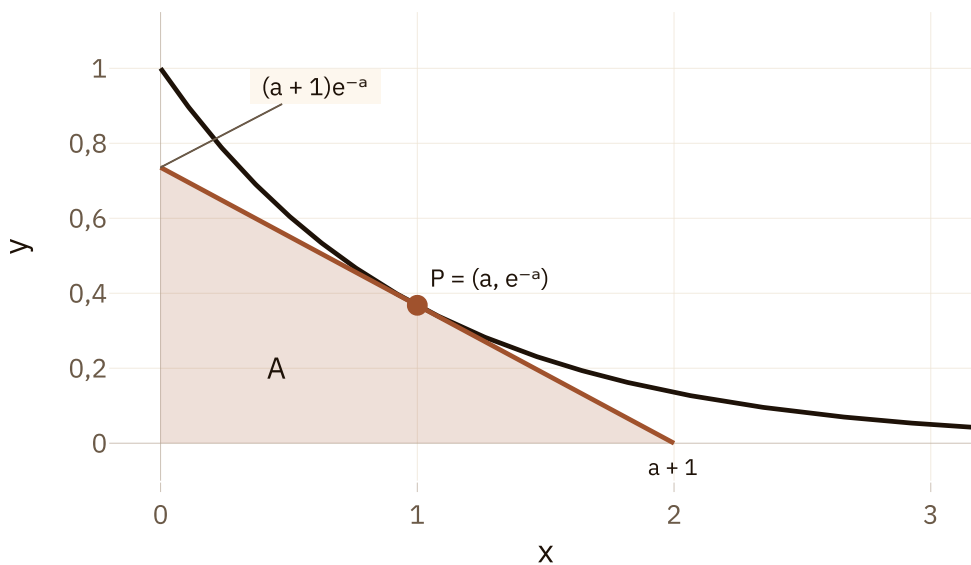
6. Största triangeln under en tangent till e^{-x}

Betrakta funktionen

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

(a) Låt $P = (a, f(a))$ vara en punkt på grafen till $y = f(x)$. Finn ett uttryck för tangenten till kurvan $y = f(x)$ genom P . (1p)

(b) Ställ upp ett uttryck för arean A (som funktion av a) av triangeln som begränsas av koordinataxlarna och tangenten till kurvan f genom punkten P . (1p)



Figuren är omritad efter originalet (här med $a = 1$).

(c) Finn det värde $a \in [0, \infty)$ för vilket arean A av triangeln ovan är maximal. (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En optimeringsuppgift: tangent med **derivatan** och sedan **största värde** på ett intervall.

Ledtråd 2

Tangenten är $y = e^{-a} - e^{-a}(x - a)$. Triangelns kateter är tangentens skärningar med axlarna, och arean är halva produkten.

Ledtråd 3

$$A(a) = \frac{(a+1)^2 e^{-a}}{2}. \text{ Jämför kritiska punkter i intervallet med } A(0) \text{ och } \lim_{a \rightarrow \infty} A(a).$$

Lösning

(a) $f'(x) = -e^{-x}$, så lutningen i $P = (a, e^{-a})$ är $-e^{-a}$ och

$$y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a) \iff \boxed{y = (a + 1 - x)e^{-a}}$$

(b) Tangenten skär x -axeln i $x_0 = a + 1$ och y -axeln i $y_0 = (a + 1)e^{-a}$. Triangelns area är

$$\boxed{A(a) = \frac{x_0 y_0}{2} = \frac{(a + 1)^2 e^{-a}}{2}}$$

(c) Derivatan:

$$A'(a) = \frac{1}{2} (2(a + 1) - (a + 1)^2) e^{-a} = \frac{(1 + a)(1 - a)}{2} e^{-a}$$

Den enda kritiska punkten i $[0, \infty)$ är $a = 1$; $A' > 0$ för $0 \leq a < 1$ och $A' < 0$ för $a > 1$. Jämför med ändpunkterna:

$$A(0) = \frac{1}{2}, \quad A(1) = \frac{4e^{-1}}{2} = \frac{2}{e}, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} A(a) = 0$$

Eftersom $e < 4$ är $\frac{2}{e} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, så maximum antas i $a = 1$:

$$\boxed{a = 1, \quad A_{\max} = \frac{2}{e}}$$

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Polynom och faktorisering](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Trigonometriska ekvationer](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Derivata](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Ekvationslösning med derivata](#)