

M0047M-2025-08-20

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2025-08-20 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_250820.pdf, m0047m_250820sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för att $n^3 + 2n$ är delbart med 3
- Uppgift 2: ensidiga gränsvärden för $e^{1/x}$, instängning av $\frac{\ln \cos x}{x^2}$ och deriverbarhet för en styckvis definierad funktion
- Uppgift 3: Taylorpolynom för $\cos x$, approximation av $\cos 1$ med feluppskattning och en approximativ ekvationslösning
- Uppgift 4: derivatan av $2 \arctan x - \arctan \frac{2x}{1-x^2}$ och funktionens konstanta värden
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkt och asymptoter för $x(2 - \ln x)^2$
- Uppgift 6: relaterade hastigheter, polisens radarmätning i en korsning

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Delbarhet med 3 genom induktion

Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att talet

$$c_n = n^3 + 2n$$

är delbart med 3. **Ledning:** ett heltal c är delbart med ett annat heltal d om det finns något heltal k så att $c = kd$. (5p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1Ett bevis med **induktion**: basfall och induktionssteg. **Ledtråd 2**

Basfallet är $n = 1$. Anta att $p^3 + 2p = 3k$ för något heltal k och visa att $(p + 1)^3 + 2(p + 1) = 3l$ för något heltal l .

 Ledtråd 3

Utveckla: $(p + 1)^3 + 2(p + 1) = (p^3 + 2p) + 3p^2 + 3p + 3$.

 Lösning

Basfall. För $n = 1$ är $c_1 = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3 = 3 \cdot 1$, som är delbart med 3.

Induktionssteg. Anta att $c_p = p^3 + 2p$ är delbart med 3 för något heltal $p \geq 1$, dvs. att $p^3 + 2p = 3k$ för något heltal k (induktionsantagandet). Då är

$$\begin{aligned} c_{p+1} &= (p + 1)^3 + 2(p + 1) = (p^3 + 3p^2 + 3p + 1) + (2p + 2) \\ &= (p^3 + 2p) + 3p^2 + 3p + 3 = 3k + 3(p^2 + p + 1) = 3l \end{aligned}$$

där $l = k + p^2 + p + 1$ är ett heltal eftersom k och p är heltal. Alltså är även c_{p+1} delbart med 3.

Enligt induktionsprincipen gäller

$$\boxed{3 \text{ delar } n^3 + 2n \text{ för alla heltal } n \geq 1}$$

Alternativt bevis utan induktion. $n^3 + 2n = (n^3 - n) + 3n = (n - 1)n(n + 1) + 3n$. Bland tre på varandra följande heltal är ett delbart med 3, så produkten $(n - 1)n(n + 1)$ är delbar med 3, och det är $3n$ också.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden och deriverbarhet

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

Ledning: Man kan ha hjälp av olikheten

$$-\frac{\tan^2 x}{2} \leq \ln \cos x \leq -\frac{\sin^2 x}{2}$$

som håller för $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. (2p)

(c) Bestäm konstanterna a och b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & \text{om } x \geq 0, \\ ae^x + be^{-x}, & \text{om } x < 0, \end{cases}$$

blir deriverbar i $x = 0$. (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) kräver **ensidiga gränsvärden** och **oegentliga gränsvärden**; (b) är ett instängningsargument; (c) handlar om **Kontinuitet** och **deriverbarhet** i skarven.

Ledtråd 2

(a) Jämför $x \rightarrow 0^+$ med $x \rightarrow 0^-$. (b) Dela olikheten med $x^2 > 0$ och använd standardgränsvärdet $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$. (c) Både funktionsvärdena och derivatorna från vänster och höger måste stämma överens i $x = 0$.

Ledtråd 3

(a) $1/x \rightarrow +\infty$ från höger men $-\infty$ från vänster. (b) $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$. (c) Villkoren blir $a + b = 1$ och $a - b = 3$.

Lösning

(a) Exponentialfunktionen är kontinuerlig, så

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \text{eftersom} \quad \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{eftersom} \quad \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$$

De ensidiga gränsvärdena är olika:

gränsvärdet existerar inte

(b) För $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ är $x^2 > 0$, så ledningens olikhet ger

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^2 \leq \frac{\ln \cos x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

Här är $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ och $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$, så båda ytterleden går mot $-\frac{1}{2}$. Instängningssatsen ger

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

(c) f är kontinuerlig i 0 om vänstergränsvärdet är lika med $f(0) = e^0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (ae^x + be^{-x}) = a + b = 1$$

Derivatan är $3e^{3x}$ för $x > 0$ och $ae^x - be^{-x}$ för $x < 0$. Båda uttrycken är kontinuerliga, så f är deriverbar i 0 om ensidiga derivatorna stämmer överens:

$$3e^0 = 3 = a - b$$

Addition av ekvationerna ger $2a = 4$:

$$a = 2, \quad b = -1$$

Kontrollerat mot facit.

3. Taylorpolynom för $\cos x$

Definiera funktionen

$$f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Finn fjärde ordningens taylorpolynom $P_4(x)$ till f kring $x = 0$. (2p)
- (b) Använd detta polynom för att finna ett approximativt rationellt värde på $\cos 1$. (1p)
- (c) Använd Lagranges restterm/felterm $E_4(x)$ för ge en uppskattning på maximala felet som görs i uppgift 3.(b). (2p)
- (d) (Bonusuppgift) Hitta en approximativ lösning till ekvationen

$$\cos x = \frac{x^2 - 1}{2}$$

genom att istället lösa ekvationen

$$P_4(x) = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Ledning: Denna fjärdegradsekvation i x är en andragradsekvation i x^2 . (1p)

Totalpoäng: 6 (varav 1 bonuspoäng)

Ledtråd 1

Taylorformel med Lagranges restterm.

Ledtråd 2

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \text{ och } E_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 \text{ för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Ledtråd 3

(c) $f^{(5)}(x) = -\sin x$, så $E_4(1) = -\frac{\sin \xi}{120}$ med $0 < \xi < 1$. (d) Ekvationen blir $x^4 - 24x^2 + 36 = 0$; kom ihåg att $\cos x$ ligger mellan -1 och 1 .

 Lösning

(a) Derivatorna upprepas med period 4:

k	0	1	2	3	4	5
$f^{(k)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f^{(k)}(0)$	1	0	-1	0	1	0

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

(b)

$$\cos 1 \approx P_4(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$$

(c) Enligt Taylors formel är $\cos x = P_4(x) + E_4(x)$ med

$$E_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = -\frac{\sin \xi}{120}x^5$$

för något ξ mellan 0 och x . För $x = 1$ ligger ξ i $(0, 1) \subset (0, \frac{\pi}{2})$, där $\sin$ är positiv och växande. Alltså är

$$0 < \sin \xi < \sin 1 < 1 \implies |E_4(1)| = \frac{\sin \xi}{120} < \frac{1}{120}$$

Eftersom $E_4(1) < 0$ är $\frac{13}{24}$ en överskattning, och

$$\frac{8}{15} = \frac{13}{24} - \frac{1}{120} < \cos 1 < \frac{13}{24}$$

Anmärkning: eftersom tredjegradscoefficienten och femtegradscoefficienten är noll är $P_4 = P_5$, så man kan också använda E_5 och få den skarpare gränsen $\frac{1}{720}$. Det verkliga felet är ungefär 0,0014.

(d) Ekvationen $P_4(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$ blir efter multiplikation med 24:

$$24 - 12x^2 + x^4 = 12x^2 - 12 \iff x^4 - 24x^2 + 36 = 0$$

Med $t = x^2$: $t^2 - 24t + 36 = 0$, alltså $t = 12 \pm \sqrt{144 - 36} = 12 \pm 6\sqrt{3}$. Båda är positiva, så det finns fyra reella rötter $x = \pm\sqrt{12 \pm 6\sqrt{3}}$.

Den ursprungliga ekvationen kan bara ha lösningar där $-1 \leq \frac{x^2 - 1}{2} \leq 1$, dvs. $x^2 \leq 3$. Eftersom $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$ är $12 + 6\sqrt{3} > 21 > 3$, så de rötterna förkastas. Däremot är $12 - 6\sqrt{3} < 12 - 9 = 3$, så

$$x = \pm \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = \pm (3 - \sqrt{3}) \approx \pm 1,268$$

Förenklingen följer av $(3 - \sqrt{3})^2 = 9 - 6\sqrt{3} + 3 = 12 - 6\sqrt{3}$. Numeriskt är de exakta lösningarna till $\cos x = \frac{x^2 - 1}{2}$ ungefär $x \approx \pm 1,265$, så approximationen är god.

Kontrollerat mot facit.

4. En arcustangensidentitet via derivatan

Definiera funktionen

$$f(x) = 2 \arctan x - \arctan \frac{2x}{1 - x^2}, \quad x \notin \pm 1.$$

(a) Vad är $f'(x)$? Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (2p)

(b) Visa att

$$f(x) = 0$$

för $-1 < x < 1$. (2p)

(c) Funktionen f har även ett konstant värde för $x > 1$. Bestäm detta värde! **Ledning:** undersök vad som händer när $x \rightarrow \infty$. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Derivering av **Arcusfunktioner** med kedjeregeln (**Deriveringsregler**), och sedan att en funktion med derivatan noll på ett intervall är konstant där (**Medelvärdessatsen**).

Ledtråd 2

$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{u'}{1+u^2}$. Definitionsmängden består av tre intervall; på vart och ett är f konstant, men konstanterna kan vara olika.

Ledtråd 3

$(1-x^2)^2 + (2x)^2 = (1+x^2)^2$. (b) Beräkna $f(0)$. (c) $2 \arctan x \rightarrow \pi$ och $\frac{2x}{1-x^2} \rightarrow 0$.

Lösning

(a) Med kedjeregeln och kvotregeln:

$$\frac{d}{dx} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2(1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

så

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2 + 4x^2}$$

Nämnaren är $1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2 = (1+x^2)^2$, så

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = \boxed{0}, \quad x \neq \pm 1$$

(b) Intervallet $(-1, 1)$ ingår i definitionsmängden och $f' = 0$ där, så enligt medelvärdessatsen är f konstant på intervallet, $f(x) = C_1$. Med $x = 0$:

$$C_1 = f(0) = 2 \arctan 0 - \arctan 0 = 0$$

Alltså är $\boxed{f(x) = 0 \text{ för } -1 < x < 1}$, dvs. $\arctan \frac{2x}{1-x^2} = 2 \arctan x$ där.

(c) På $(1, \infty)$ är också $f' = 0$, så $f(x) = C_2$ där. Konstanten är lika med gränsvärdet i oändligheten. Eftersom $\arctan$ är kontinuerlig:

$$C_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 \arctan x - \arctan \frac{2x}{1-x^2}) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \arctan 0 = \pi$$

$$\boxed{f(x) = \pi \text{ för } x > 1}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $x(2 - \ln x)^2$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = x(2 - \ln x)^2, \quad x > 0.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: gränsvärden i ändpunkterna, **teckenschema** för derivatan och **andraderivatan** för inflexionspunkter.

Ledtråd 2

Undersök $x \rightarrow 0^+$ (med standardgränsvärdet $x^a \ln x \rightarrow 0$), $x \rightarrow \infty$ och $f(x)/x$ för en eventuell sned asymptot. Derivera med produktregeln.

Ledtråd 3

$$f'(x) = \ln x (\ln x - 2) \text{ och } f''(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}.$$

Lösning

Asymptoter. $f(x) \geq 0$ med likhet bara då $\ln x = 2$, dvs. $x = e^2$. Vid $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(2 - \ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} - \sqrt{x} \ln x)^2 = (0 - 0)^2 = 0$$

eftersom $\sqrt{x} \ln x \rightarrow 0$ (standardgränsvärde). Alltså ingen lodrät asymptot vid $x = 0$. Vid $x \rightarrow \infty$ går $f(x) \rightarrow \infty$, och

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \ln x)^2 = \infty$$

så det finns ingen sned asymptot heller. f är kontinuerlig på $(0, \infty)$, så

kurvan saknar asymptoter

Derivata.

$$f'(x) = (2 - \ln x)^2 + x \cdot 2(2 - \ln x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = (2 - \ln x)(- \ln x) = \ln x (\ln x - 2)$$

Kritiska punkter: $\ln x = 0$ och $\ln x = 2$, dvs. $x = 1$ och $x = e^2$.

	$0 < x < 1$	1	$1 < x < e^2$	e^2	$x > e^2$
$\ln x$	–	0	+	+	+
$\ln x - 2$	–	–	–	0	+
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

$$\text{lok. max } f(1) = 4, \quad \text{lok. min } f(e^2) = 0$$

Minimet är också globalt, eftersom $f \geq 0$.

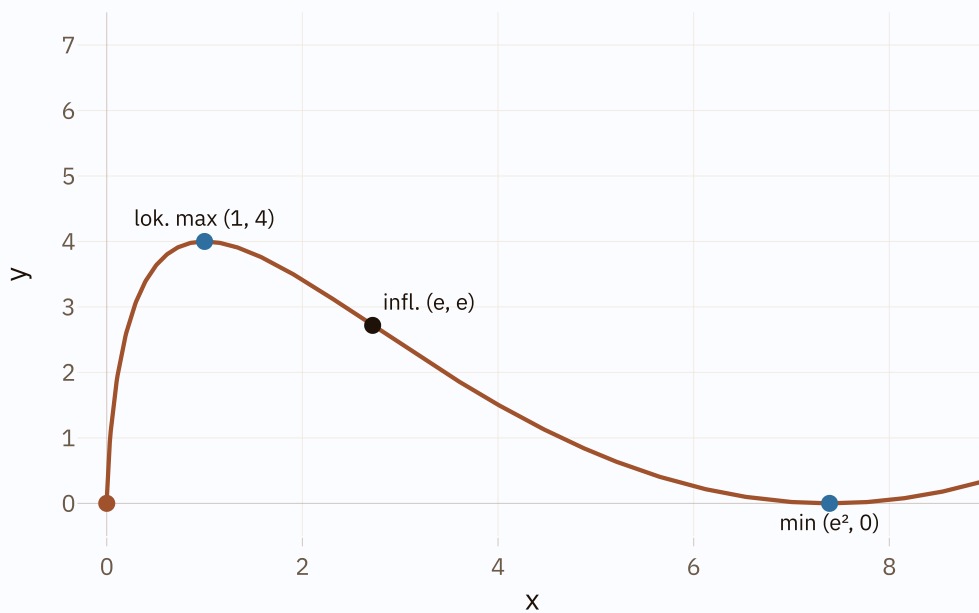
Andraderivata.

$$f''(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 2) + \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$$

Nämnaren är positiv, så $f'' < 0$ för $0 < x < e$ (konkav) och $f'' > 0$ för $x > e$ (konvex). Teckenbytet ger en inflexionspunkt, och $f(e) = e(2 - 1)^2 = e$:

inflexionspunkt (e, e)

Skiss. Kurvan startar i origo (utan att nå dit, eftersom $x > 0$), stiger till $(1, 4)$, sjunker genom inflexionspunkten (e, e) ned till $(e^2, 0)$ där den tangerar x-axeln och växer sedan obegränsat.



Kontrollerat mot facit.

6. Radarmätning i en korsning

En polisman P kör sin polisbil med hastigheten 50 km/h rakt norrut längs en väg. En bit fram på denna väg finns en korsning med en annan väg som går i öst-västlig riktning. Polismannen får syn på en bil B som kommer åkandes på den andra vägen in mot korsningen från öster och riktar sin radarpistol mot denna bil. Vid det tillfälle då polisbilen är 180 m från korsningen mäter polismannen att avståndet mellan polisbilen P och bilen B på den korsande vägen är 300 m och minskar med hastigheten 90 km/h. På bägge vägarna råder en hastighetsbegränsning på 70 km/h. Beräkna den andra bilens hastighet och avgör huruvida föraren av B gör sig skyldig till hastighetsöverträdelse eller ej. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Relaterade hastigheter: **Implicit derivering** av ett samband med avseende på tiden.

Ledtråd 2

Låt $y(t)$ vara polisbilens avstånd till korsningen, $x(t)$ bilen B 's avstånd till korsningen och $s(t)$ avståndet mellan bilarna. Pythagoras sats ger $s^2 = x^2 + y^2$.

Ledtråd 3

Derivera: $ss' = xx' + yy'$. Avstånd som minskar har negativ derivata: $y' = -50$ och $s' = -90$. Bestäm först x ur Pythagoras.

Lösning

Låt $y(t)$ vara polisbilens avstånd till korsningen, $x(t)$ bilen B 's avstånd till korsningen och $s(t)$ avståndet mellan bilarna. Vägarna är vinkelräta, så

$$s(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$$

Derivering med avseende på t ger

$$2ss' = 2xx' + 2yy' \iff x' = \frac{ss' - yy'}{x}$$

Vid mättillfället t_0 är $y = 180$ m, $s = 300$ m, $y' = -50$ km/h och $s' = -90$ km/h (båda avstånden minskar). Ur Pythagoras:

$$x = \sqrt{300^2 - 180^2} = \sqrt{60^2(5^2 - 3^2)} = 60 \cdot 4 = 240 \text{ m}$$

Längderna förekommer i både täljare och nämnare, så de kan stå i meter medan hastigheterna står i km/h:

$$x'(t_0) = \frac{300 \cdot (-90) - 180 \cdot (-50)}{240} = \frac{-27000 + 9000}{240} = -75 \text{ km/h}$$

Avståndet till korsningen minskar alltså med 75 km/h:

bil B kör i 75 km/h > 70 km/h, alltså fortkörning

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning kallar på ett par ställen båda avstånden y och skriver nämnaren i slutformeln som $y(t_0)$, men räknar med $x(t_0) = 240$ m och får samma svar, 75 km/h.

Se även

- [M0065M](#)
 - [Matematisk induktion](#)
 - [Gränsvärden](#)
 - [Oegentliga gränsvärden](#)
 - [Kontinuitet](#)
 - [Derivata](#)
 - [Taylors formel](#)
 - [Arcusfunktioner](#)
 - [Medelvårdessatsen](#)
 - [Extremvärden](#)
 - [Grafritning och asymptoter](#)
 - [Andraderivata och konvexitet](#)
 - [Implicit derivering](#)
-