

M0047M-2025-05-22

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2025-05-22 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_250522.pdf, m0047m_250522sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för en teleskoperande summa $\sum 1/(4k^2 - 1)$
- Uppgift 2: kontinuitet för $\sin x/x$ och två gränsvärden: förlängning med konjugat och med $1 + \cos x$
- Uppgift 3: krökningen hos $y = e^x$: värde i en punkt, gränsvärden och maximum
- Uppgift 4: tangent till en hippoped och största y -värdet på kurvan med implicit derivering
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter för $(\ln x)^2/x^3$
- Uppgift 6: arean av cirkeln som tangerar $y = x + 1/x$ via kortaste avståndet till origo

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Induktionsbevis för en summaformel

Formeln

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$$

gäller för alla positiva heltal $n = 1, 2, 3, \dots$. Bevisa detta, till exempel med induktion. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett bevis med **matematisk induktion** av en formel för en **summa**.

Ledtråd 2

Visa basfallet $n = 1$. Anta sedan att formeln gäller för $n = p$ och visa att den då gäller för $n = p + 1$, dvs. att summan blir $\frac{p+1}{2p+3}$.

Ledtråd 3

Faktorisera den nya termen: $4(p+1)^2 - 1 = (2p+1)(2p+3)$. Då får båda bråken nämnaren $(2p+1)(2p+3)$.

Lösning

Basfall $n = 1$:

$$VL = \frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = HL$$

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för $n = p$ (induktionsantagandet):

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{p}{2p+1}$$

Vi ska visa att summan till $p + 1$ blir $\frac{p+1}{2(p+1)+1} = \frac{p+1}{2p+3}$. Den nya termen är

$$\frac{1}{4(p+1)^2 - 1} = \frac{1}{(2(p+1)-1)(2(p+1)+1)} = \frac{1}{(2p+1)(2p+3)}$$

så med induktionsantagandet:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{4k^2 - 1} &= \frac{p}{2p+1} + \frac{1}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{p(2p+3) + 1}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{2p^2 + 3p + 1}{(2p+1)(2p+3)} \\ &= \frac{(p+1)(2p+1)}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{p+1}{2p+3} \end{aligned}$$

Formeln gäller alltså för $n = p + 1$ om den gäller för $n = p$.

Slutsats. Enligt induktionsprincipen gäller

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1} \quad \text{för alla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Alternativt (teleskopsumma). $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{4k^2-1}$, så

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$$

eftersom alla mellanliggande termer tar ut varandra.

Kontrollerat mot facit.

2. Kontinuitet och två gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a) Bestäm konstanten A så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{om } x \neq 0, \\ A, & \text{om } x = 0, \end{cases}$$

blir kontinuerlig. (1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - x}{x-1}$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) handlar om **kontinuitet** i en punkt; (b) och (c) är **gränsvärden** av typen $\frac{0}{0}$ som ska förenklas.

Ledtråd 2

(a) f är kontinuerlig i 0 om $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$; använd standardgränsvärdet för $\frac{\sin x}{x}$. (b) Förläng med konjugatet $\sqrt{2-x} + x$. (c) Förläng med $1 + \cos x$ och använd trigonometriska ettan (**Trigonometri**).

Ledtråd 3

(b) Täljaren blir $2 - x - x^2 = -(x-1)(x+2)$. (c) Täljaren blir $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, och ett $\sin x$ förkortas bort.

Lösning

(a) För $x \neq 0$ är f kontinuerlig. I $x = 0$ krävs att

$$A = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$A = 1$

(b) Förläng med konjugatet:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2-x}-x}{x-1} &= \frac{(2-x)-x^2}{(x-1)(\sqrt{2-x}+x)} = \frac{-(x-1)(x+2)}{(x-1)(\sqrt{2-x}+x)} = \frac{-(x+2)}{\sqrt{2-x}+x} \\ &\rightarrow \frac{-(1+2)}{\sqrt{1+1}} = \boxed{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(c) Förläng med $1 + \cos x$:

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos x}{x \sin x} &= \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)x \sin x} = \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)x \sin x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \\ &\rightarrow 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Krökningen hos $y = e^x$

Låt

$$y = f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vi definierar *krökningen* $\kappa = \kappa(x)$ i en punkt x på kurva C given av funktionen $y = f(x)$ som

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}.$$

- (a) Beräkna krökningen $\kappa(x)$ för funktionen f i punkten $x = 0$. (2p)
- (b) Beräkna gränsvärdena av krökningen $\kappa(x)$ för funktionen f när $x \rightarrow \pm\infty$. (2p)
- (c) Finn maximum av krökningen $\kappa(x)$ för funktionen f när $x \in \mathbb{R}$. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Formeln är given; uppgiften är **derivering**, **gränsvärden mot oändligheten** och ett **största värde**.

Ledtråd 2

$y' = y'' = e^x$, så $\kappa(x) = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$. För $x \rightarrow \infty$: bryt ut e^{2x} i nämnaren. För maximum: derivera κ med kvotregeln (**Deriveringsregler**).

Ledtråd 3

$$\kappa'(x) = \frac{e^x(1 - 2e^{2x})}{(1 + e^{2x})^{5/2}}, \text{ som bara är noll när } e^{2x} = \frac{1}{2}.$$

Lösning

(a) $y' = e^x$ och $y'' = e^x > 0$, så

$$\kappa(x) = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}, \quad \kappa(0) = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

(b) Bryt ut e^{2x} i nämnaren:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(e^{2x})^{3/2} (e^{-2x} + 1)^{3/2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-2x}}{(e^{-2x} + 1)^{3/2}} = \frac{0}{(0 + 1)^{3/2}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}} &= \frac{0}{(1 + 0)^{3/2}} = 0 \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \kappa(x) = 0} \end{aligned}$$

(c) Eftersom $\kappa(0) > 0$ och $\kappa \rightarrow 0$ i båda riktningarna antar den kontinuerliga funktionen κ ett största värde i en kritisk punkt. Kvotregeln:

$$\kappa'(x) = \frac{e^x (1 + e^{2x})^{3/2} - e^x \cdot \frac{3}{2} (1 + e^{2x})^{1/2} \cdot 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^3} = \frac{e^x (1 + e^{2x} - 3e^{2x})}{(1 + e^{2x})^{5/2}} = \frac{e^x (1 - 2e^{2x})}{(1 + e^{2x})^{5/2}}$$

$\kappa'(x) = 0 \iff e^{2x} = \frac{1}{2} \iff x = -\frac{\ln 2}{2}$, och $\kappa' > 0$ till vänster och $\kappa' < 0$ till höger om punkten. Där är $e^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och

$$\kappa_{\max} = \kappa\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\kappa_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ i } x = -\frac{\ln 2}{2}}$$

Kontrollerat mot facit.

4. Tangent och högsta punkt på en hippoped

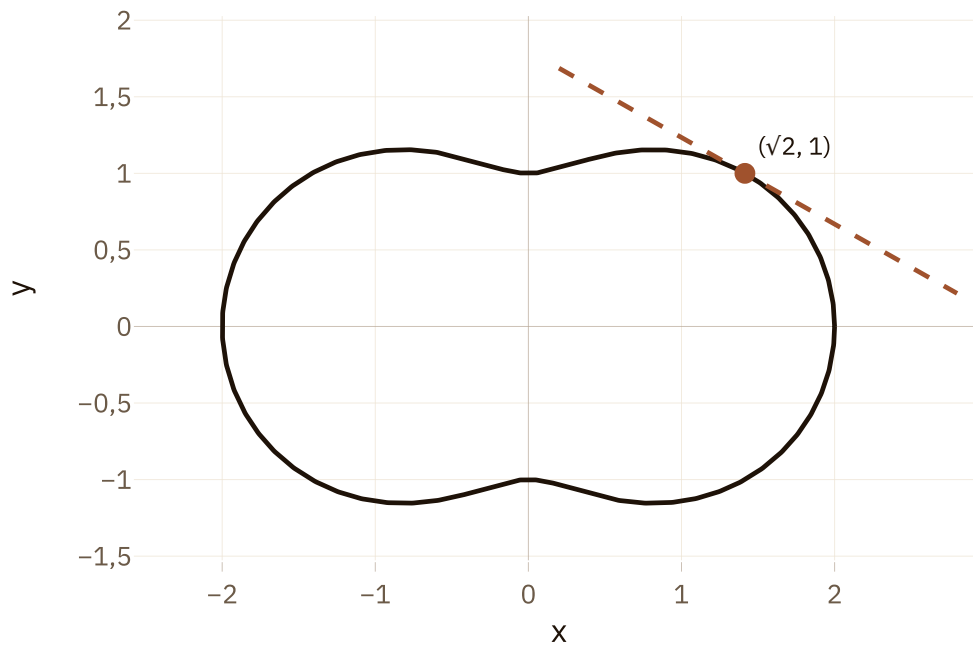
Ekvationen

$$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + y^2, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

definierar en sluten slät kurva i planet (en så kallad *Hippoped*), se nedanstående figur.

(a) Finn ekvationen för tangenten till kurvan i punkten $(\sqrt{2}, 1)$. (3p)

(b) Hitta största värdet på y för alla punkter (x, y) på Hippopeden ovan. (2p)



Figuren är omritad efter originalet; tangenten i $(\sqrt{2}, 1)$ hör till lösningen.

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvan är ingen graf $y = f(x)$; använd **implicit derivering**. (b) är ett **extremvärdesproblem** på kurvan.

Ledtråd 2

Kontrollera först att punkten ligger på kurvan. Derivera båda leden med avseende på x , med $y = y(x)$, och lös ut y' . I (b) har den högsta punkten vågrät tangent, dvs. $y' = 0$.

Ledtråd 3

$$y' = \frac{2x(2 - (x^2 + y^2))}{y(2(x^2 + y^2) - 1)}$$
 I (b) ger täljaren $x = 0$ eller $x^2 + y^2 = 2$; sätt in i kurvans ekvation.

 Lösning

(a) Punkten ligger på kurvan: $x_0^2 + y_0^2 = 2 + 1 = 3$ och $VL = 3^2 = 9 = 4 \cdot 2 + 1 = HL$.

Implicit derivering med $y = y(x)$:

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') &= 8x + 2yy' \\ (4(x^2 + y^2) - 2)yy' &= 8x - 4x(x^2 + y^2) \iff y' = \frac{2x(2 - (x^2 + y^2))}{y(2(x^2 + y^2) - 1)} \end{aligned}$$

I $(\sqrt{2}, 1)$, där $x^2 + y^2 = 3$:

$$y' = \frac{2\sqrt{2}(2 - 3)}{1 \cdot (6 - 1)} = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Enpunktsformeln:

$$y - 1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}(x - \sqrt{2}) \iff \boxed{y = \frac{9 - 2\sqrt{2}x}{5}}$$

(b) Kurvan är sluten och slät, så y antar ett största värde, och det är positivt eftersom $(0, 1)$ ligger på kurvan. Där $y \neq 0$ och $2(x^2 + y^2) \neq 1$ ger formeln för y' ovan att $y' = 0$ precis när

$$x(2 - (x^2 + y^2)) = 0 \iff x = 0 \text{ eller } x^2 + y^2 = 2$$

Undantagen är inga kandidater: $y = 0$ ger inte maximum, och $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ insatt i ekvationen ger $\frac{1}{4} = 3x^2 + \frac{1}{2}$, vilket är omöjligt.

- $x = 0$: $y^4 = y^2 \iff y^2(y^2 - 1) = 0$, alltså $y = \pm 1$ ($y = 0$ är uteslutet).
- $x^2 + y^2 = 2$: skriv högerledet som $3x^2 + (x^2 + y^2)$. Då är $4 = 3x^2 + 2$, så $x^2 = \frac{2}{3}$ och $y^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, alltså $y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Eftersom $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ är

$$\boxed{y_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}}, \text{ i punkterna } (\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $(\ln x)^2/x^3$

Betrakta funktionen

$$y = \frac{(\ln x)^2}{x^3}, \quad x > 0.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: gränsvärden i ändpunkterna, teckenschema för derivatan (**Extremvärden**) och för andraderivatan (**Andraderivata och konvexitet**).

Ledtråd 2

Undersök $x \rightarrow 0^+$ och $x \rightarrow \infty$. Derivera med kvotregeln och bryt ut $\ln x$; sätt gärna $t = \ln x$ när du faktorerar.

Ledtråd 3

$$y' = \frac{\ln x (2 - 3 \ln x)}{x^4} \text{ och } y'' = \frac{2(6 \ln x - 1)(\ln x - 1)}{x^5}.$$

Lösning

Asymptoter. När $x \rightarrow 0^+$ gäller $\frac{1}{x^3} \rightarrow +\infty$ och $(\ln x)^2 \rightarrow +\infty$, så

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x^3} = +\infty$$

och $x = 0$ är lodrät asymptot. Åt höger:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x^{3/2}} \right)^2 = 0^2 = 0$$

eftersom en potens dominerar logaritmen. Alltså är $y = 0$ vågrät asymptot då $x \rightarrow \infty$. Funktionen är kontinuerlig på $(0, \infty)$, så det finns inga andra asymptoter. Dessutom är $y \geq 0$ med likhet bara för $x = 1$.

Derivata.

$$y' = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^3 - (\ln x)^2 \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2 \ln x - 3(\ln x)^2}{x^4} = \frac{\ln x (2 - 3 \ln x)}{x^4}$$

Kritiska punkter: $\ln x = 0$ eller $\ln x = \frac{2}{3}$, dvs. $x = 1$ och $x = e^{2/3}$.

	$0 < x < 1$	1	$1 < x < e^{2/3}$	$e^{2/3}$	$x > e^{2/3}$
$\ln x$	–	0	+	+	+
$2 - 3 \ln x$	+	+	+	0	–
x^4	+	+	+	+	+
y'	–	0	+	0	–
y	↘	lok. min	↗	lok. max	↘

$$y(1) = 0, \quad y(e^{2/3}) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{e^2} = \frac{4}{9e^2}$$

$$\text{lok. min } y(1) = 0, \quad \text{lok. max } y(e^{2/3}) = \frac{4}{9e^2}$$

Minimet 0 är också globalt.

Andraderivata. Med $y' = \frac{2 \ln x - 3(\ln x)^2}{x^4}$:

$$y'' = \frac{\left(\frac{2}{x} - \frac{6 \ln x}{x}\right)x^4 - (2 \ln x - 3(\ln x)^2)4x^3}{x^8} = \frac{12(\ln x)^2 - 14 \ln x + 2}{x^5} = \frac{2(6 \ln x - 1)(\ln x - 1)}{x^5}$$

Nollställan: $\ln x = \frac{1}{6}$ eller $\ln x = 1$, dvs. $x = e^{1/6}$ och $x = e$.

	$0 < x < e^{1/6}$	$e^{1/6}$	$e^{1/6} < x < e$	e	$x > e$
$6 \ln x - 1$	–	0	+	+	+
$\ln x - 1$	–	–	–	0	+

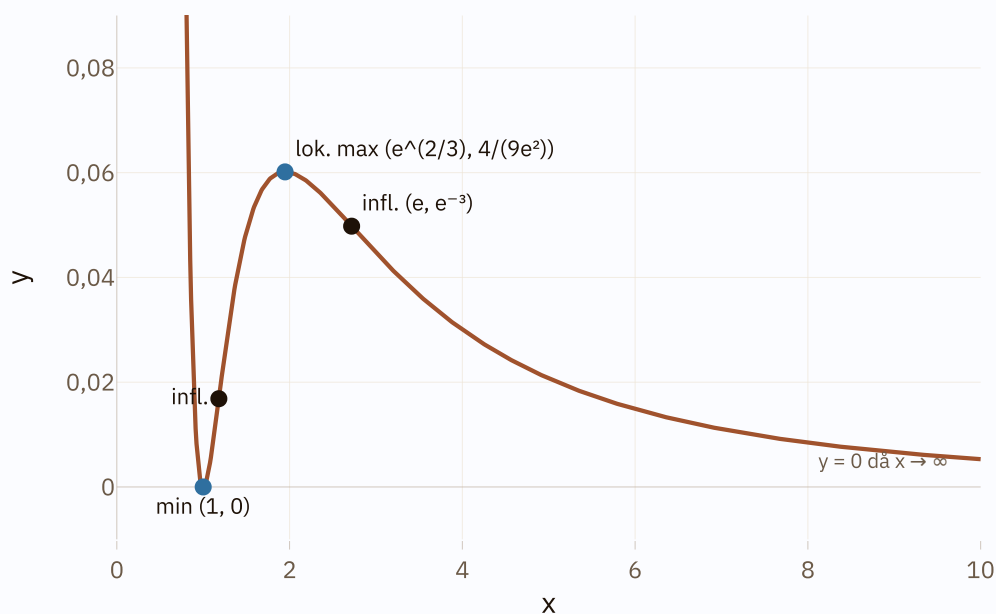
	$0 < x < e^{1/6}$	$e^{1/6}$	$e^{1/6} < x < e$	e	$x > e$
y''	+	0	-	0	+
y	konvex	infl.	konkav	infl.	konvex

inflexionspunkter i $x = e^{1/6}$ ($y = \frac{1}{36\sqrt{e}}$) och $x = e$ ($y = \frac{1}{e^3}$)

asymptoter: $x = 0$ (lodrät) och $y = 0$ då $x \rightarrow \infty$

Ordningen längs x-axeln är $1 < e^{1/6} < e^{2/3} < e$.

Skiss.



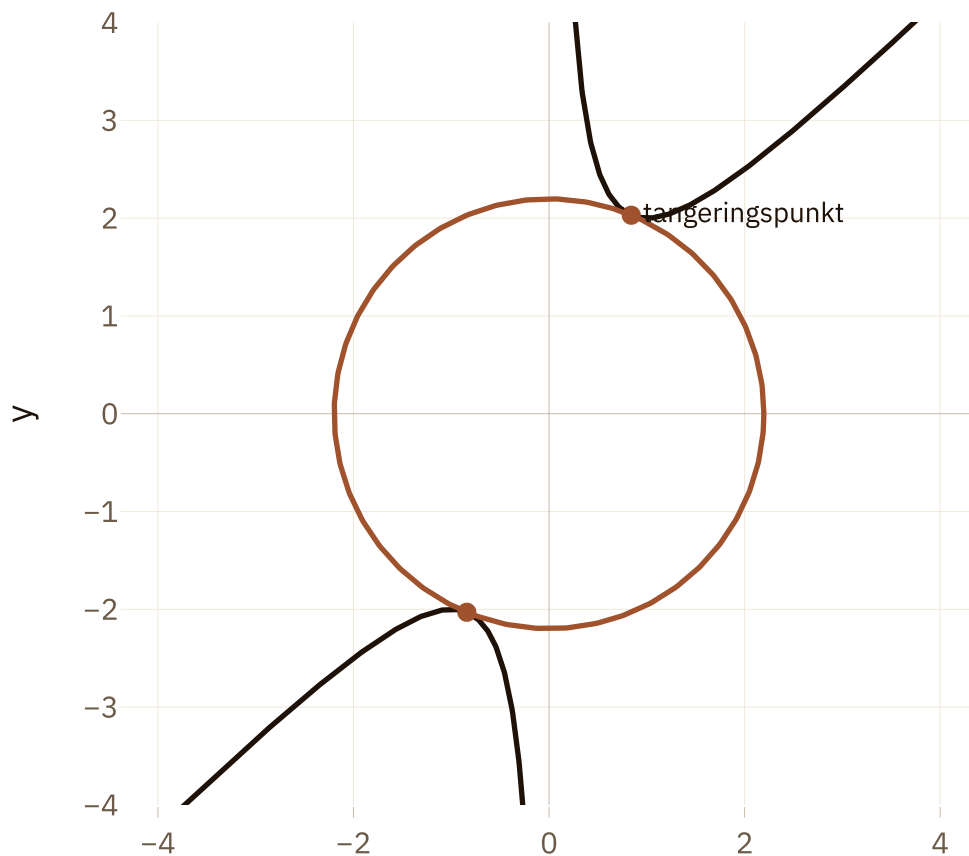
Kontrollerat mot facit.

6. Cirkeln som tangerar $y = x + 1/x$

Hur stor area har området som innesluts av cirkeln som tangerar grafen till funktionen

$$y = f(x) = x + \frac{1}{x},$$

se nedanstående figur. **Ledning:** Hur finner man cirkelns radie? (5p)



Figuren är omritad efter originalet.

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett **minimeringsproblem**: cirkelns radie är kortaste avståndet från origo till kurvan.

Ledtråd 2

f är udda, så kurvan och cirkeln är symmetriska kring origo och cirkeln har centrum i origo. Minimera kvadraten på avståndet, $g(x) = x^2 + f(x)^2$, för $x > 0$.

Ledtråd 3

$$g(x) = 2x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \text{ och } g'(x) = 4x - \frac{2}{x^3}, \text{ som är noll när } x^4 = \frac{1}{2}.$$

 Lösning

$f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -f(x)$, så f är udda och grafen är symmetrisk kring origo. Den tangerande cirkeln har därför centrum i origo, och radien R är kortaste avståndet från origo till kurvan. Av symmetrin räcker det att se på $x > 0$.

Avståndet i kvadrat från origo till $(x, f(x))$ är

$$g(x) = x^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

Minimum för avståndet antas där g har minimum. $g(x) \rightarrow +\infty$ både då $x \rightarrow 0^+$ och då $x \rightarrow \infty$, så minimum antas i en kritisk punkt:

$$g'(x) = 4x - \frac{2}{x^3} = 0 \iff x^4 = \frac{1}{2} \iff x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Där är

$$R^2 = g = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

Cirkelskivans area:

$$A = \pi R^2 = 2\pi(1 + \sqrt{2})$$

Alternativt (kvadratkomplettering). $g(x) = \left(\sqrt{2}x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + 2\sqrt{2} \geq 2 + 2\sqrt{2}$, med likhet när $x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Talföljder och summor](#)
- [Kontinuitet](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Deriveringsregler](#)

- Implicit derivering
 - Extremvärden
 - Grafitning och asymptoter
 - Andraderivata och konvexitet
-