

M0047M-2025-03-20

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2025-03-20 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_250320.pdf, m0047m_250320sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: binomialutveckling av $(a + b)^4 + (a - b)^4$, konstant term och en fjärdegradsekvation via variabelbyte
- Uppgift 2: tre gränsvärden: arcusfunktioner, gemensam nämnare och en andra differenskvot
- Uppgift 3: inverterbarhet och invers till $x + \sqrt{x^2 + 1}$ med definitionsmängd
- Uppgift 4: olikheten $\sin^2 x/2 \leq -\ln \cos x$ med derivata och uppskattning av $\ln \cos \frac{\pi}{6}$
- Uppgift 5: kurvundersökning av $x^3/(x - 1)^2$ med extremvärden, inflexionspunkter, asymptoter och värdemängd
- Uppgift 6: relaterade hastigheter: ljuspunkten från en roterande fyr längs en strandlinje

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Binomialutveckling och en fjärdegradsekvation

Betrakta binomialutvecklingen

$$(a + b)^4.$$

(a) Utveckla

$$(a + b)^4 + (a - b)^4$$

så långt som möjligt. (2p)

(b) Bestäm den konstanta termen i uttrycket

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{x}\right)^4 + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)^4.$$

(2p)

(c) Finn alla reella lösningar till fjärdegradsekvationen

$$x^4 + (x - 2)^4 = 34.$$

Ledning: Gör variabelbytet $t = x - 1$ och utnyttja utvecklingen i uppgift 1.(a). (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Binomialsatsen med **binomialkoefficienter** (Polynom och faktorisering); (c) blir en andragradsekvation i t^2 .

Ledtråd 2

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$, koefficienterna från rad 4 i Pascals triangel.

Termerna med udda potens av b tar ut varandra. I (b) sätter du $a = \frac{x}{2}$, $b = \frac{3}{x}$.

Ledtråd 3

(b) Den konstanta termen kommer från $12a^2b^2$. (c) Med $x = t + 1$ blir vänsterledet $(t + 1)^4 + (t - 1)^4 = 2(t^4 + 6t^2 + 1)$.

Lösning

(a) Binomialsatsen ger

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad (a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

Summan:

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 = 2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^4 = 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)$$

(b) Med $a = \frac{x}{2}$ och $b = \frac{3}{x}$ i (a):

$$2\left(\frac{x^4}{16} + 6 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \frac{9}{x^2} + \frac{81}{x^4}\right) = \frac{x^4}{8} + 27 + \frac{162}{x^4}$$

Den konstanta termen är

$$27$$

(c) Med $t = x - 1$, dvs. $x = t + 1$ och $x - 2 = t - 1$, ger (a) med $a = t, b = 1$:

$$34 = (t+1)^4 + (t-1)^4 = 2(t^4 + 6t^2 + 1) \iff t^4 + 6t^2 - 16 = 0$$

Detta är en andragradsekvation i t^2 :

$$t^2 = -3 \pm \sqrt{9 + 16} = -3 \pm 5, \quad \text{dvs. } t^2 = 2 \text{ eller } t^2 = -8$$

$t^2 = -8$ saknar reella lösningar, och $t^2 = 2$ ger $t = \pm\sqrt{2}$. Alltså

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin x}{\arccos x}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 4} - \frac{3}{x^2 - 2x} \right).$$

(2p)

(c) Låt $f(x) = x^4$. Beräkna

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 2f(2) + f(2-h)}{h^2}.$$

Ledning: Här kan man ha användning för binomialutvecklingen i uppgift 1.(a). (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett oegentligt gränsvärde med arcusfunktioner; (b) och (c) är gränsvärden av typen $\frac{0}{0}$ som ska förenklas.

Ledtråd 2

(a) Vart går täljare och nämnare var för sig när $x \rightarrow 1^-$? (b) Faktorisera nämnarna och skriv på gemensam nämnare $x(x-2)(x+2)$. (c) Täljaren är $(2+h)^4 + (2-h)^4 - 2 \cdot 2^4$; använd 1.(a) med $a = 2$, $b = h$.

Ledtråd 3

(a) $\arccos x \rightarrow 0^+$ medan $\arcsin x \rightarrow \frac{\pi}{2}$. (b) Täljaren blir $6x - 3(x+2) = 3(x-2)$. (c) Täljaren blir $48h^2 + 2h^4$.

Lösning

(a) När $x \rightarrow 1^-$ går $\arcsin x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ och $\arccos x \rightarrow 0^+$ ($\arccos$ är positiv på $[-1, 1)$). En positiv täljare delat med något som går mot 0^+ ger

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin x}{\arccos x} = \boxed{+\infty}$$

Observera att kvoten inte är $\arctan x$.

(b) Faktorisering och gemensam nämnare:

$$\frac{6}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{x(x-2)} = \frac{6x - 3(x+2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{3(x-2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{3}{x(x+2)}$$

för $x \neq 2$. Alltså

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x(x+2)} = \frac{3}{2 \cdot 4} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

(c) Med $a = 2$ och $b = h$ i 1.(a) är $(2 + h)^4 + (2 - h)^4 = 2(2^4 + 6 \cdot 2^2 h^2 + h^4)$, så

$$\frac{(2 + h)^4 - 2 \cdot 2^4 + (2 - h)^4}{h^2} = \frac{2(24h^2 + h^4)}{h^2} = 48 + 2h^2 \rightarrow \boxed{48}$$

Detta är en differenskvot av en differenskvot, så gränsvärdet är $f''(2) = 12 \cdot 2^2 = 48$, vilket stämmer.

Kontrollerat mot facit.

3. Inversen till $x + \sqrt{x^2 + 1}$

Låt

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

(a) Visa att f är inverterbar för alla $x \in \mathbb{R}$. Motivera! (2p)

(b) Finn $f^{-1}(x)$. Vad är definitionsmängden för f^{-1} ? (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Invers funktion: en strängt monoton funktion är inverterbar, och inversens definitionsmängd är funktionens värdemängd.

Ledtråd 2

(a) Visa att $f'(x) > 0$ för alla x (**Derivata**). (b) Bestäm $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ för värdemängden; förläng med konjugatet i $-\infty$. Lös sedan $x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ för y .

Ledtråd 3

(a) $\left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| < 1$. (b) $x - y = \sqrt{y^2 + 1}$; kvadrera, så försvinner y^2 .

 Lösning

(a) Derivatan är

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Eftersom $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1}$ är $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1$, och därmed

$$0 < f'(x) < 2 \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}$$

Alltså är f strängt växande på hela $\mathbb{R}$ och därför injektiv, dvs. f är inverterbar.

(b) **Värdemängd.** f är kontinuerlig och strängt växande, så V_f är intervallet mellan gränsvärdena i $\pm\infty$. Uppenbart är $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. I $-\infty$ förlänger vi med konjugatet:

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \rightarrow 0^+ \quad \text{då } x \rightarrow -\infty$$

eftersom nämnaren går mot $+\infty$. Alltså är $V_f = (0, \infty)$, och det är inversens definitionsmängd.

Inversen. Låt $x > 0$ och lös $x = y + \sqrt{y^2 + 1}$:

$$x - y = \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = y^2 + 1 \iff y = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

Kvadreringen kan ge falska rötter bara om $x - y < 0$, men här är $x - y = \frac{x^2 + 1}{2x} > 0$, så lösningen gäller. Alltså

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right), \quad D_{f^{-1}} = (0, \infty)$$

Kontrollerat mot facit.

4. Olikheter mellan $\sin^2 x$, $\ln \cos x$ och $\tan^2 x$

Definiera

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{2} + \ln \cos x$$

för $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

(a) Vad är $f'(x)$? Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (2p)

(b) Visa att

$$\frac{\sin^2 x}{2} \leq -\ln \cos x$$

för

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

För vilka x gäller det att vi har likhet i olikheten ovan? (2p)

(c) Man kan även visa (behövs ej) att

$$-\ln \cos x \leq \frac{\tan^2 x}{2}, \quad \text{för } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Använd denna olikhet tillsammans med olikheten i uppgift 4.(b) för att hitta övre och nedre begränsning av värdet på

$$\ln \cos \frac{\pi}{6}.$$

(1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En olikhet som visas med **derivata** och **största värde** (Ekvationslösning med derivata).

Ledtråd 2

(a) Kedjeregeln (**Deriveringsregler**) och $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$. (b) Olikheten är ekvivalent med $f(x) \leq 0$; undersök tecknet på f' och jämför med $f(0)$.

Ledtråd 3

(a) $f'(x) = -\frac{\sin^3 x}{\cos x}$, som är positiv för $x < 0$ och negativ för $x > 0$. (c) Byt tecken i dubbelolikheten och sätt in $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ och $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

 Lösning

(a)

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{2} + \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x \cos^2 x - \sin x}{\cos x} = \frac{-\sin x (1 - \cos^2 x)}{\cos x}$$

$$f'(x) = -\frac{\sin^3 x}{\cos x}$$

(b) Olikheten är ekvivalent med $f(x) \leq 0$. På intervallet är $\cos x > 0$, och $f'(x) = 0$ bara för $x = 0$.

	$-\frac{\pi}{2} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$
$-\sin^3 x$	+	0	-
$\cos x$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

f är strängt växande på $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ och strängt avtagande på $[0, \frac{\pi}{2})$, så

$$f(x) \leq f(0) = 0 + \ln 1 = 0$$

med likhet bara i $x = 0$. Alltså gäller olikheten, och

likhet råder endast för $x = 0$

(c) Tillsammans ger olikheterna $\frac{\sin^2 x}{2} \leq -\ln \cos x \leq \frac{\tan^2 x}{2}$, alltså

$$-\frac{\tan^2 x}{2} \leq \ln \cos x \leq -\frac{\sin^2 x}{2}$$

Med $x = \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ och $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (likhet kan inte råda eftersom $x \neq 0$):

$$-\frac{1}{6} < \ln \cos \frac{\pi}{6} < -\frac{1}{8}$$

Som kontroll är $\ln \cos \frac{\pi}{6} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,144$, vilket ligger mellan $-0,167$ och $-0,125$.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $x^3/(x-1)^2$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Ange funktionens värdemängd $R(f)$. Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: asymptoter, **extremvärden** med teckenschema för f' och inflexionspunkter med teckenschema för f'' (**Andraderivata och konvexitet**).

Ledtråd 2

Polynomdivision ger den sneda asymptoten. $x = 1$ är ett nollställe till nämnaren men inte till täljaren. Derivera med kvotregeln och förkorta med $x - 1$.

Ledtråd 3

$$f(x) = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}, \quad f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \text{ och } f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}.$$

Lösning

Asymptoter. Polynomdivision:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

Resttermen går mot 0 när $x \rightarrow \pm\infty$, så $y = x + 2$ är sned asymptot åt båda hållen. Dessutom är

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

eftersom täljaren går mot 1 och nämnaren mot 0^+ . Alltså är $x = 1$ lodrät asymptot. Vågräta asymptoter saknas.

Derivata.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(3(x-1) - 2x)}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3
x^2	+	0	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0
$(x - 1)^3$	-	-	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	+	odef.	-	0
$f(x)$	↗	terrass	↗	asympt.	↘	lok

Andraderivata. Med $f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$:

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4} = \frac{3x(x^2 - 3x + 2) - 3x(x^2 - 3x)}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$6x$	-	0	+	+	+
$(x - 1)^4$	+	+	+	0	+
$f''(x)$	-	0	+	odef.	+
$f(x)$	konkav	infl.	konvex	asympt.	konvex

$$\text{lok. min } f(3) = \frac{27}{4}; \quad \text{terrass- och inflexionspunkt } (0, 0)$$

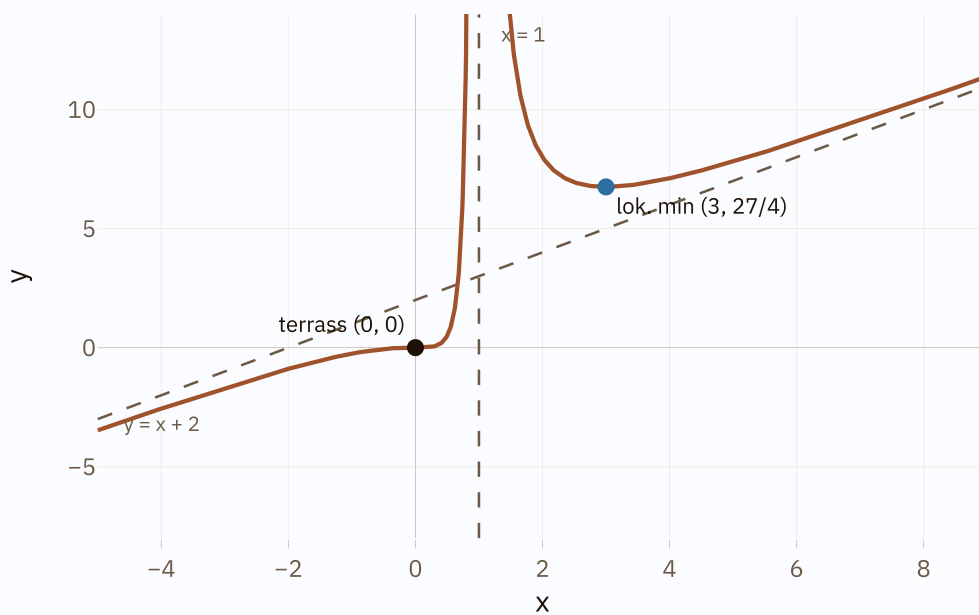
$$\text{asymptoter: } x = 1 \text{ och } y = x + 2 \text{ (då } x \rightarrow \pm\infty)$$

Värdeområde. På $(-\infty, 1)$ är f kontinuerlig och växande från $-\infty$ (sned asymptot) till $+\infty$ (lodrät asymptot), så redan där antas alla reella värden:

$$R(f) = \mathbb{R}$$

Globala extremvärden saknas.

Skiss.



Kontrollerat mot facit.

6. Ljuspunkten från en roterande fyr

En fyr F är placerad på en liten ö 2 km från närmsta punkt A på en lång rak strandlinje. Lampan på fyren roterar med 8 varv/minut och lyser på så sätt upp en punkt P som rör sig från vänster till höger längs strandlinjen för varje rotation, se nedanstående figur.

Figur: F ligger rakt ovanför A ; ljusstrålen går från F till P på strandlinjen och bildar vinkeln θ med sträckan FA .

- (a) Hur snabbt rör sig punkten P när den är 6 km från A ? (3p)
- (b) Vid en specifik punkt P gäller det att den upplysta punkten rör sig med hastigheten 500 km/min. Hur långt från A befinner sig punkten P då? (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Relaterade hastigheter: två storheter som beror på tiden kopplas med en ekvation som deriveras med kedjeregeln ([Deriveringsregler](#), [Elementära funktioners derivator](#)).

Ledtråd 2

Låt $x = |AP|$. Den rätvinkliga triangeln FAP ger $x = 2 \tan \theta$. Vinkelhastigheten är $\frac{d\theta}{dt} = 8 \cdot 2\pi \text{ rad/min}$.

Ledtråd 3

$$\frac{dx}{dt} = 2(1 + \tan^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} = 2\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) \cdot 16\pi = 8\pi(x^2 + 4).$$

Lösning

Låt $x = x(t)$ vara avståndet $|AP|$ och $\theta = \theta(t)$ vinkeln vid F mellan FA och FP . Triangeln FAP är rätvinklig vid A , så

$$\tan \theta = \frac{x}{2} \iff x = 2 \tan \theta$$

Derivering med avseende på t (kedjeregeln):

$$\frac{dx}{dt} = 2(1 + \tan^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} = 2\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) \frac{d\theta}{dt}$$

Vinkelhastigheten är

$$\frac{d\theta}{dt} = 8 \frac{\text{varv}}{\text{min}} \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{varv}} = 16\pi \text{ rad/min}$$

så

$$\frac{dx}{dt} = 32\pi \cdot \frac{4 + x^2}{4} = 8\pi(x^2 + 4) \text{ km/min}$$

(a) Med $x = 6$:

$$\frac{dx}{dt} = 8\pi(36 + 4) = \boxed{320\pi \text{ km/min} \approx 1005 \text{ km/min}}$$

det vill säga ungefär 60 000 km/h.

(b) Villkoret $\frac{dx}{dt} = 500$ ger

$$8\pi(x^2 + 4) = 500 \iff x^2 = \frac{125}{2\pi} - 4 \iff x = \pm\sqrt{\frac{125}{2\pi} - 4}$$

Avståndet till A är alltså

$$|AP| = \sqrt{\frac{125}{2\pi} - 4} \approx 3,99 \text{ km} \approx 4 \text{ km}$$

(på vardera sidan om A).

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning anger $\approx 1000 \text{ km/min}$ i (a) och $\pm 4 \text{ km}$ i (b); läraren avrundar $\pi \approx \frac{25}{8}$, medan det exakta värdet är $\sqrt{125/(2\pi) - 4} \approx 3,99 \text{ km}$.

Se även

- M0065M
- Binomialkoefficient
- Polynom och faktorisering
- Gränsvärden
- Oegentliga gränsvärden
- Arcusfunktioner
- Funktioner och invers
- Derivata
- Deriveringsregler
- Extremvärden
- Ekvationslösning med derivata
- Grafritning och asymptoter
- Andraderivata och konvexitet