

M0047M-2024-12-18

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2024-12-18 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_241218.pdf, m0047m_241218sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: rekursiv talföljd $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$: växande och begränsad med induktion, sedan gränsvärdet
- Uppgift 2: tre gränsvärden: instängning, faktorisering av $\frac{0}{0}$ -uttryck och logaritmlagar
- Uppgift 3: $\cos x$ och $\tan x$ skär varandra under räta vinklar, och derivatorna i skärningspunkterna
- Uppgift 4: värdemängd, antal nollställen och lokalisering av nollställen för ett tredjegradspolynom
- Uppgift 5: kurvan $x(2 - \ln x)$ och tangenter som skär y -axeln i $(0, a)$
- Uppgift 6: Taylorpolynom till $\arcsin x$ och en rationell approximation av π

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Rekursiv talföljd och induktion

Definiera talföljden $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ rekursivt genom

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

(a) Visa med induktion att $a_n > a_{n-1}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$ (2p)

(b) Visa med induktion att $a_n < 2$ för $n = 0, 1, 2, \dots$ (2p)

(c) Då talföljden (a_n) är växande och uppåt begränsad så konvergerar den mot ett gränsvärde

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Bestäm a . (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) och (b) är bevis med **Matematisk induktion**; (c) är ett gränsvärde för en rekursiv **talföljd**.

Ledtråd 2

Visa basfallet och induktionssteget. I steget används att $t \mapsto \sqrt{t+1}$ är strängt växande. (c) Låt $n \rightarrow \infty$ på båda sidor i rekursionen; $a_{n+1} \rightarrow a$ också.

Ledtråd 3

(a) Om $a_p > a_{p-1}$ så är $\sqrt{a_p+1} > \sqrt{a_{p-1}+1}$. (b) Om $a_p < 2$ så är $a_{p+1} < \sqrt{3} < 2$. (c) Gränsvärdet uppfyller $a = \sqrt{a+1}$, dvs. $a^2 - a - 1 = 0$.

Lösning

(a) Basfall $n = 1$: $a_1 = \sqrt{a_0+1} = \sqrt{2} > 1 = a_0$.

Induktionssteg: antag att $a_p > a_{p-1}$ för något $p \geq 1$ (induktionsantagande). Eftersom kvadratroten är strängt växande gäller

$$a_{p+1} = \sqrt{a_p+1} > \sqrt{a_{p-1}+1} = a_p$$

Enligt induktionsprincipen gäller $a_n > a_{n-1}$ för alla $n \geq 1$, dvs. (a_n) är växande.

(b) Basfall $n = 0$: $a_0 = 1 < 2$.

Induktionssteg: antag att $a_p < 2$ för något $p \geq 0$. Då är

$$a_{p+1} = \sqrt{a_p + 1} < \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$$

Enligt induktionsprincipen gäller $a_n < 2$ för alla $n \geq 0$.

(c) Om $a_n \rightarrow a$ så gäller också $a_{n+1} \rightarrow a$. Kvadratroten är kontinuerlig, så

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n + 1} = \sqrt{a + 1}$$

Kvadrering ger $a^2 - a - 1 = 0$, dvs. $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Alla $a_n \geq a_0 = 1 > 0$, så $a \geq 1$ och den negativa roten förkastas:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Det är gyllene snittet $\varphi \approx 1,618$. De första termerna 1; 1,414; 1,554; 1,598; 1,612; ... närmar sig mycket riktigt detta värde.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 - 3x - 2}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{(\ln x)^2 + \ln(x^2) - 3}{\ln\left(\frac{x}{e}\right)}.$$

Ledning: logaritmlagar. (2p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1

(a) är ett **gränsvärde mot oändligheten** med en begränsad täljare; (b) och (c) är **gränsvärden** av typen $\frac{0}{0}$ som ska förenklas.

 Ledtråd 2

(a) Använd att $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ (**Arcusfunktioner**) och instängning. (b) $x = 1$ är nollställe till både täljare och nämnare, så båda har faktorn $x - 1$. (c) Skriv om med **logaritmlagarna** och sätt $t = \ln x$.

 Ledtråd 3

(b) $3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$ och $5x^2 - 3x - 2 = (5x + 2)(x - 1)$. (c) Uttrycket blir $\frac{t^2 + 2t - 3}{t - 1}$ med $t \rightarrow 1$.

 Lösning

(a) För $x > 0$ gäller

$$-\frac{\pi}{2x} < \frac{\arctan x}{x} < \frac{\pi}{2x}$$

och båda gränserna går mot 0 när $x \rightarrow \infty$. Enligt instängningssatsen är

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = \boxed{0}$$

(b) Både täljare och nämnare är 0 i $x = 1$, så de har faktorn $x - 1$:

$$\frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 - 3x - 2} = \frac{(3x + 1)(x - 1)}{(5x + 2)(x - 1)} = \frac{3x + 1}{5x + 2} \rightarrow \frac{4}{7}$$

$\frac{4}{7}$

(c) Med $\ln(x^2) = 2 \ln x$ och $\ln \frac{x}{e} = \ln x - 1$ (för $x > 0$) blir uttrycket, med $t = \ln x \rightarrow 1$,

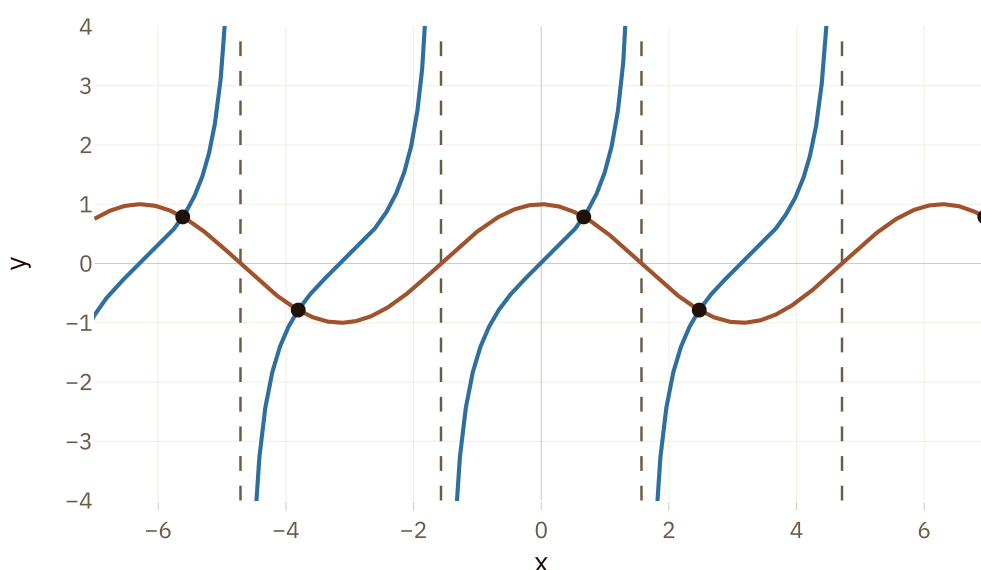
$$\frac{t^2 + 2t - 3}{t - 1} = \frac{(t - 1)(t + 3)}{t - 1} = t + 3 \rightarrow 1 + 3$$

4

Kontrollerat mot facit.

3. Cosinus och tangens skär varandra under räta vinklar

Graferna till funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = \tan x$ skär varandra oändligt många gånger, se nedanstående figur.



Figuren är omritad efter originalet.

(a) Visa att dessa funktioner skär varandra under räta vinklar i varje skärningspunkt. (2p)

(b) Beräkna derivatorna till dessa två funktioner i varje skärningspunkt. (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Två kurvor skär varandra under rät vinkel när tangenternas lutningar (derivator) har produkten -1 . Derivatorna finns bland [Elementära funktioners derivator](#).

Ledtråd 2

I en skärningspunkt ξ gäller $\cos \xi = \tan \xi = \frac{\sin \xi}{\cos \xi}$, dvs. $\cos^2 \xi = \sin \xi$. Lutningarna är $f'(\xi) = -\sin \xi$ och $g'(\xi) = \frac{1}{\cos^2 \xi}$.

Ledtråd 3

(a) $f'(\xi)g'(\xi) = -\frac{\sin \xi}{\cos^2 \xi}$. (b) Med $\cos^2 \xi = 1 - \sin^2 \xi$ blir $\cos^2 \xi = \sin \xi$ en andragradsekvation i $s = \sin \xi$: $s^2 + s - 1 = 0$.

Lösning

(a) Låt ξ vara en skärningspunkt; där är $\cos \xi \neq 0$ eftersom $\tan$ är definierad. Då gäller

$$\cos \xi = \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \iff \cos^2 \xi = \sin \xi \iff \frac{\sin \xi}{\cos^2 \xi} = 1$$

Derivatorna är $f'(x) = -\sin x$ och $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, så tangenternas lutningar i ξ är $k_1 = -\sin \xi$ och $k_2 = \frac{1}{\cos^2 \xi}$. Deras produkt är

$$k_1 k_2 = -\frac{\sin \xi}{\cos^2 \xi} = -1$$

alltså är tangenterna vinkelräta och kurvorna skär varandra under räta vinklar i varje skärningspunkt.

(b) Med $\cos^2 \xi = 1 - \sin^2 \xi$ och $s = \sin \xi$:

$$1 - s^2 = s \iff s^2 + s - 1 = 0 \iff s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Eftersom $\sin \xi = \cos^2 \xi > 0$ förkastas den negativa roten, och $\sin \xi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i varje skärningspunkt. Därmed är

$$f'(\xi) = -\sin \xi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618$$

$$g'(\xi) = \frac{1}{\cos^2 \xi} = \frac{1}{\sin \xi} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$$

i varje skärningspunkt. Talet $g'(\xi)$ är gyllene snittet φ och $f'(\xi) = -\frac{1}{\varphi}$, så produkten är -1 som i

(a). Skärningspunkterna själva är $\xi = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$ och $\xi = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Kontrollerat mot facit.

4. Nollställena till ett tredjegradspolynom

Låt

$$y = p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Använd verktyg och begrepp som gränsvärden, teckenstudium av derivatan, graf och satsen om mellanliggande värden för att motivera svaren till nedanstående uppgifter.

- (a) Vad är värdemängden för p ? Motivera! (1p)
- (b) Avgör hur många reella nollställena som polynomet $p(x)$ har. Motivera! (2p)
- (c) Lokalisera nollställena i uppgift (b) genom att ange i vilka intervall $(n, n+1)$ (där n är heltal) nollställena ligger. Motivera! (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ekvationslösning med derivata: gränsvärden i $\pm\infty$, teckenstudium av derivatan och satsen om mellanliggande värden för kontinuerliga funktioner.

Ledtråd 2

(a) Vart går $p(x)$ när $x \rightarrow \pm\infty$? (b) $p'(x) = 3(x-3)(x+1)$. Beräkna de lokala extremvärdena och se om de har olika tecken. (c) Räkna ut $p(n)$ för heltal n och leta teckenbyten.

Ledtråd 3

$p(-1) = 8 > 0$ och $p(3) = -24 < 0$. Teckenbyten finns mellan $p(-3)$ och $p(-2)$, mellan $p(0)$ och $p(1)$ samt mellan $p(4)$ och $p(5)$.

Lösning

(a) p är ett polynom och därmed kontinuerligt på $\mathbb{R}$. Dessutom är

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = \pm\infty$$

Enligt satsen om mellanliggande värden antar p alla värden däremellan:

$$V_p = \mathbb{R}$$

(b) Derivatan är

$$p'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$$

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 3$	3	$x > 3$
$x + 1$	–	0	+	+	+
$3(x - 3)$	–	–	–	0	+
$p'(x)$	+	0	–	0	+
$p(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

med $p(-1) = -1 - 3 + 9 + 3 = 8$ och $p(3) = 27 - 27 - 27 + 3 = -24$.

På vart och ett av de tre intervallen är p strängt monotont, så där finns högst ett nollställe. Och det finns precis ett, enligt satsen om mellanliggande värden:

- $(-\infty, -1)$: $p \rightarrow -\infty$ åt vänster och $p(-1) = 8 > 0$.
- $(-1, 3)$: $p(-1) = 8 > 0$ och $p(3) = -24 < 0$.
- $(3, \infty)$: $p(3) = -24 < 0$ och $p \rightarrow \infty$ åt höger.

p har exakt tre reella nollställen

(c) Funktionsvärden i heltalen:

x	-3	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	-24	1	8	3	-8	-1

Teckenbyten sker mellan -3 och -2 , mellan 0 och 1 och mellan 4 och 5 . Enligt satsen om mellanliggande värden ligger ett nollställe i vart och ett av dessa intervall, och enligt (b) finns inga fler:

$$x_1 \in (-3, -2), \quad x_2 \in (0, 1), \quad x_3 \in (4, 5)$$

Numeriskt är nollställena ungefär $-2,064$, $0,305$ och $4,759$ (exakt $1 + 4 \cos \frac{7\pi}{9}$, $1 + 4 \cos \frac{13\pi}{9}$ och $1 + 4 \cos \frac{\pi}{9}$, som lärarens överkursanmärkning visar).

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $x(2 - \ln x)$ och dess tangenter

Betrakta funktionen

$$f(x) = x(2 - \ln x)$$

för $x > 0$.

(a) Beräkna $f'(x)$ och ställ upp ordentligt teckenschema för derivatan. Undersök vad som händer när $x \rightarrow 0+$ respektive när $x \rightarrow \infty$. Skissera kurvan. (3p)

(b) Låt $a > 0$. Finn ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $x = a$. (1p)

(c) I vilken punkt skär denna tangent y -axeln? (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning med **produktregeln** och teckenschema, och sedan en tangent via **derivatan**.

Ledtråd 2

(a) Standardgränsvärdet $x \ln x \rightarrow 0$ när $x \rightarrow 0+$ (**Gränsvärden**). (b) Enpunktsformeln $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. (c) Sätt $x = 0$.

Ledtråd 3

$$f'(x) = (2 - \ln x) + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x, \text{ som är noll i } x = e.$$

Lösning

(a) Produktregeln ger

$$f'(x) = 1 \cdot (2 - \ln x) + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x$$

som är noll för $x = e$.

	$0 < x < e$	e	$x > e$
$f'(x) = 1 - \ln x$	+	0	-
$f(x)$	↗	lok. max	↘

Maximum är $f(e) = e(2 - 1) = e$.

Gränsvärden, med standardgränsvärdet $x \ln x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - x \ln x) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(2 - \ln x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \ln x) = -\infty$$

Kurvan startar alltså i origo (utan att nå den), växer till maximum (e, e) , skär x -axeln i $x = e^2$ (där $\ln x = 2$) och går sedan mot $-\infty$. Asymptoter saknas: ingen vågrät eller sned åt höger och ingen lodrät, eftersom f är begränsad nära 0. Dessutom är $f''(x) = -\frac{1}{x} < 0$, så kurvan är konkav.

$$\boxed{f'(x) = 1 - \ln x, \quad \max f(e) = e, \quad f(x) \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0^+, \quad f(x) \rightarrow -\infty \text{ då } x \rightarrow \infty}$$

(b) Med $f(a) = a(2 - \ln a)$ och $f'(a) = 1 - \ln a$:

$$y = a(2 - \ln a) + (1 - \ln a)(x - a) = (1 - \ln a)x + 2a - a \ln a - a + a \ln a$$

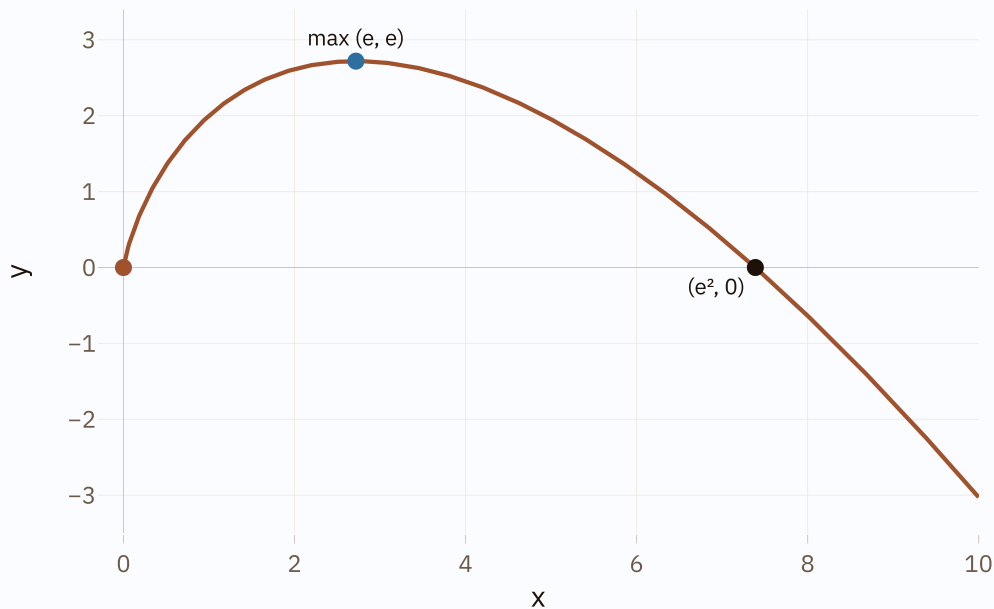
$$\boxed{y = (1 - \ln a)x + a}$$

(c) $x = 0$ ger $y = a$:

$(0, a)$

Tangenten i $x = a$ skär alltså y -axeln på höjden a , för varje $a > 0$.

Skiss.



Kontrollerat mot facit.

6. Taylorpolynom till $\arcsin x$ och en approximation av π

Sätt

$$f(x) = \arcsin x.$$

(a) Vad är

$$f\left(\frac{1}{2}\right)?$$

Motivera! (1p)

(b) Finn tredje ordningens taylorpolynom $P_3(x)$ till $f(x)$ kring punkten 0. Lagranges restterm behöver ej bestämmas. (3p)

(c) Använd taylorpolynomet P_3 du funnit ovan i punkten $x = \frac{1}{2}$ samt värdet på $f\left(\frac{1}{2}\right)$ för att finna en rationell approximation av π . (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett **arcusvärde** och ett Maclaurinpolynom enligt **Taylors formel**.

Ledtråd 2

(a) Vilken vinkel i $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ har sinus $\frac{1}{2}$? (b) $P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$, med $f'(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ (**Inversa funktioners derivata**). (c) $\frac{\pi}{6} = f\left(\frac{1}{2}\right) \approx P_3\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ledtråd 3

$$f''(x) = \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}} \text{ och } f'''(x) = \frac{1 + 2x^2}{(1 - x^2)^{5/2}}, \text{ så } f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0 \text{ och } f'''(0) = 1.$$

Lösning

(a) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ och $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, som är värdemängden för $\arcsin$. Alltså är

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

(b) Derivatorna:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - x^2)^{-1/2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}} \\ f'''(x) &= \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} + x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1 - x^2)^{-5/2} \cdot (-2x) = \frac{(1 - x^2) + 3x^2}{(1 - x^2)^{5/2}} = \frac{1 + 2x^2}{(1 - x^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

I $x = 0$: $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0$ och $f'''(0) = 1$. Därmed är

$$P_3(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$$

$$P_3(x) = x + \frac{x^3}{6}$$

(c) För x nära 0 är $f(x) \approx P_3(x)$, så

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2} \approx P_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} = \frac{25}{48}$$

$$\pi \approx 6 \cdot \frac{25}{48} = \frac{25}{8} = 3,125$$

Det verkliga felet i π är ungefär 0,017. Lärarens anmärkning visar med Lagranges restterm att

$$\left| \frac{\pi}{6} - \frac{25}{48} \right| < \frac{7}{180}.$$

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Talföljder och summor](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Arcusfunktioner](#)
- [Derivata](#)
- [Elementära funktioners derivator](#)
- [Inversa funktioners derivata](#)
- [Kontinuitet](#)
- [Extremvärden](#)
- [Ekvationslösning med derivata](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Taylors formel](#)