

M0047M-2024-10-30

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2024-10-30 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_241030.pdf, m0047m_241030sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för en formel för n :te derivatan av $(x^2 + x)e^x$
- Uppgift 2: tre gränsvärden: $\sqrt[n]{n}$, faktorisering och dubbla vinkeln
- Uppgift 3: tangenter till $y = x + \frac{1}{x}$ genom en punkt utanför kurvan
- Uppgift 4: invers till $\sqrt{x+1}$, en sammansatt ekvation och skärning mellan f och f^{-1}
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkter, asymptoter och värdemängd för $(x^2 + 2)(x+1)e^{-x}$
- Uppgift 6: rektangeln med största omkrets inskriven i en ellips

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Induktionsbevis för en högre derivata

Bevisa med induktion att det för alla heltal $n = 1, 2, 3, \dots$ gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n} ((x^2 + x)e^x) = (x^2 + (2n+1)x + n^2)e^x.$$

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett bevis med **matematisk induktion** där induktionssteget är en derivering med **produktregeln**.

Ledtråd 2

Visa basfallet $n = 1$. Anta sedan att formeln gäller för $n = p$ och derivera båda led en gång

$$\text{till: } \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} = \frac{d}{dx} \frac{d^p}{dx^p}.$$

Ledtråd 3

$$\frac{d}{dx} ((x^2 + (2p+1)x + p^2) e^x) = (x^2 + (2p+3)x + p^2 + 2p + 1) e^x. \text{ Känn igen } 2(p+1) + 1 \text{ och } (p+1)^2.$$

Lösning

Basfall $n = 1$. Produktregeln ger

$$\frac{d}{dx} ((x^2 + x) e^x) = (2x + 1) e^x + (x^2 + x) e^x = (x^2 + 3x + 1) e^x = (x^2 + (2 \cdot 1 + 1)x + 1^2) e^x$$

så formeln gäller för $n = 1$.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för $n = p$ (induktionsantagandet):

$$\frac{d^p}{dx^p} ((x^2 + x) e^x) = (x^2 + (2p+1)x + p^2) e^x$$

Då är

$$\begin{aligned} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} ((x^2 + x) e^x) &= \frac{d}{dx} ((x^2 + (2p+1)x + p^2) e^x) \\ &= (2x + 2p + 1) e^x + (x^2 + (2p+1)x + p^2) e^x \\ &= (x^2 + (2p+3)x + p^2 + 2p + 1) e^x \\ &= (x^2 + (2(p+1) + 1)x + (p+1)^2) e^x \end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$.

Slutsats. Formeln gäller för $n = 1$, och om den gäller för $n = p$ gäller den för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller den för alla heltal $n \geq 1$:

$$\frac{d^n}{dx^n} ((x^2 + x) e^x) = (x^2 + (2n + 1)x + n^2) e^x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x}.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett **gränsvärde mot oändligheten** som skrivs om med **logaritmer**; (b) och (c) är **gränsvärden** av typen $\frac{0}{0}$ som ska förenklas.

Ledtråd 2

(a) Skriv $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln n/n}$. (b) Faktorisera täljaren som konjugat två gånger. (c) Skriv $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ (Trigonometri).

Ledtråd 3

(a) Standardgränsvärdet $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$. (b) $x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$. (c) Täljaren blir $2(1 - \cos x)(1 + \cos x)$.

Lösning

(a) $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln n/n}$. Eftersom exponentialfunktionen är kontinuerlig och $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ (standardgränsvärde) är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n/n} = e^0 = \boxed{1}$$

(b) Faktorisering:

$$\frac{x^4 - 16}{x - 2} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{x - 2} = (x + 2)(x^2 + 4)$$

för $x \neq 2$, så

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = 4 \cdot 8 = \boxed{32}$$

(Gränsvärdet är också derivatan av x^4 i $x = 2$, alltså $4 \cdot 2^3 = 32$.)

(c) Med $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$:

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} = \frac{2 - 2 \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{2(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 2(1 + \cos x)$$

för x nära men skilt från 0, så

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} = 2(1 + 1) = \boxed{4}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Tangenter till $x + 1/x$ genom en punkt utanför kurvan

Finn alla tangenter till kurvan

$$y = f(x) = x + \frac{1}{x}$$

som går genom punkten $P = (-\frac{4}{3}, 0)$. **Ledning:** ligger P på kurvan?

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Tangentens ekvation med **derivatan** som lutning, men tangeringspunkten är okänd.

Ledtråd 2

$f(-\frac{4}{3}) = -\frac{25}{12} \neq 0$, så P ligger inte på kurvan. Låt tangeringspunkten vara $(a, f(a))$; tangenten är $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Ledtråd 3

Tangenten blir $y = (1 - \frac{1}{a^2})x + \frac{2}{a}$. Kravet att P ligger på den ger $2a^2 - 3a - 2 = 0$.

Lösning

$f(-\frac{4}{3}) = -\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{25}{12} \neq 0$, så P är ingen tangeringspunkt. Låt tangeringspunkten vara $(a, a + \frac{1}{a})$, $a \neq 0$. Då är $f'(a) = 1 - \frac{1}{a^2}$ och enpunktsformeln ger

$$y = a + \frac{1}{a} + (1 - \frac{1}{a^2})(x - a) = (1 - \frac{1}{a^2})x + \frac{2}{a}$$

Tangenten ska gå genom $(-\frac{4}{3}, 0)$. Multiplicera med $3a^2$:

$$0 = -\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{2}{a} \iff 0 = -4(a^2 - 1) + 6a \iff 2a^2 - 3a - 2 = (2a + 1)(a - 2) = 0$$

$a = -\frac{1}{2}$ ger lutningen $1 - 4 = -3$ och $\frac{2}{a} = -4$; $a = 2$ ger lutningen $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ och $\frac{2}{a} = 1$:

$$y = -3x - 4 \quad \text{och} \quad y = \frac{3}{4}x + 1$$

Tangeringspunkterna är $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ och $(2, \frac{5}{2})$.

Kontrollerat mot facit.

4. Invers till $\sqrt{x+1}$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x \geq -1.$$

(a) Visa att f är inverterbar. Finn inversen f^{-1} till f . Vad är definitionsmängden $D(f^{-1})$ för inversen? (2p)

(b) Lös ekvationen

$$f(f(f(x))) = 2.$$

(1p)

(c) Finn alla $x \in D(f) \cap D(f^{-1})$ som uppfyller ekvationen

$$f(x) = f^{-1}(x).$$

Ledning: hur förhåller sig grafen av $y = f(x)$ till grafen av $y = f^{-1}(x)$? (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En uppgift om **inversa funktioner**: injektivitet, värdemängd och spegling i $y = x$.

Ledtråd 2

(a) Visa att $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (eller att f är strängt växande). Lös $x = \sqrt{y+1}$ för y ; $D(f^{-1}) = V(f)$. (b) Använd f^{-1} tre gånger. (c) Graferna är spegelbilder i $y = x$.

Ledtråd 3

(a) $f^{-1}(x) = x^2 - 1$ för $x \geq 0$. (c) En skärningspunkt ligger på $y = x$, så lös $x^2 - 1 = x$ och kontrollera att roten ligger i $[0, \infty)$.

Lösning

(a) Om $f(x_1) = f(x_2)$ är $\sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1}$; kvadrering ger $x_1 + 1 = x_2 + 1$, alltså $x_1 = x_2$. f är injektiv och därmed inverterbar. (Alternativt: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ för $x > -1$, så f är strängt växande.)

$f(-1) = 0$ och $f(x)$ växer kontinuerligt mot ∞ , så $V(f) = [0, \infty)$. För inversen: $x = \sqrt{y+1}$ med $x \geq 0$ ger $x^2 = y + 1$, dvs. $y = x^2 - 1$.

$$f^{-1}(x) = x^2 - 1, \quad D(f^{-1}) = [0, \infty)$$

(b) Använd f^{-1} på båda led tre gånger:

$$f(f(x)) = f^{-1}(2) = 3, \quad f(x) = f^{-1}(3) = 8, \quad x = f^{-1}(8) = 63$$

Kontroll: $f(63) = 8, f(8) = 3, f(3) = 2$.

$$x = 63$$

(c) $D(f) \cap D(f^{-1}) = [-1, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$. Grafen till f^{-1} är spegelbilden av grafen till f i linjen $y = x$. Eftersom f är strängt växande ligger en skärningspunkt på $y = x$, så $f(x) = x = f^{-1}(x)$:

$$x^2 - 1 = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Eftersom $\sqrt{5} > 1$ är $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ och ligger utanför $[0, \infty)$. För $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ är $x^2 = x + 1$, så $f(x) = \sqrt{x^2} = x = f^{-1}(x)$.

Direkt kontroll: $\sqrt{x+1} = x^2 - 1$ ger efter kvadrering $x^4 - 2x^2 - x = x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0$.
 Roten $x = 0$ är falsk ($f(0) = 1$ men $f^{-1}(0) = -1$), och $x = -1$ ligger utanför $[0, \infty)$.

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $(x^2 + 2)(x + 1)e^{-x}$

Definiera funktionen

$$y = f(x) = (x^2 + 2)(x + 1)e^{-x}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Ange funktionens värdemängd $R(f)$. Skissera kurvan.

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: gränsvärden i $\pm\infty$, derivata för **extremvärden** och **andraderivata** för inflexionspunkter.

Ledtråd 2

f är definierad på hela $\mathbb{R}$, så lodräta asymptoter saknas. Undersök $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ och, åt vänster, $\lim f(x)/x$. Derivera $f = (x^3 + x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ med produktregeln, två gånger.

Ledtråd 3

$f'(x) = x^2(2 - x)e^{-x}$ och $f''(x) = x(x - 1)(x - 4)e^{-x}$. Observera att f' inte byter tecken i $x = 0$.

 Lösning

Asymptoter. f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$, så lodräta asymptoter saknas. Med $f(x) =$

$$\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)x^3 e^{-x} \text{ gäller}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \cdot 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

eftersom exponentialfunktionen dominerar potensfunktionen åt höger. Alltså är $y = 0$ vågrät asymptot åt höger. Åt vänster är

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)x^2 e^{-x} = +\infty$$

så där finns ingen sned asymptot.

Derivata. $f(x) = (x^3 + x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ ger

$$f'(x) = (3x^2 + 2x + 2)e^{-x} - (x^3 + x^2 + 2x + 2)e^{-x} = (-x^3 + 2x^2)e^{-x} = x^2(2 - x)e^{-x}$$

Kritiska punkter: $x = 0$ och $x = 2$.

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
x^2	+	0	+	+	+
$2 - x$	+	+	+	0	-
e^{-x}	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	terrass	↗	lok. max	↘

Andraderivata.

$$f''(x) = (-3x^2 + 4x)e^{-x} - (-x^3 + 2x^2)e^{-x} = (x^3 - 5x^2 + 4x)e^{-x} = x(x - 1)(x - 4)e^{-x}$$

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 4$	4
x	-	0	+	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+	+
$x - 4$	-	-	-	-	-	0
e^{-x}	+	+	+	+	+	+

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 4$	4
$f''(x)$	–	0	+	0	–	0
$f(x)$	konkav	infl.	konvex	infl.	konkav	inf

f'' byter tecken i alla tre nollställena, så alla tre är inflexionspunkter. $f(0) = 2$, $f(1) = \frac{6}{e}$ och $f(4) = \frac{90}{e^4}$.

lok. max $f(2) = \frac{18}{e^2}$; terrasspunkt $(0, 2)$; inga lokala minimum

inflexionspunkter $(0, 2)$, $(1, \frac{6}{e})$, $(4, \frac{90}{e^4})$

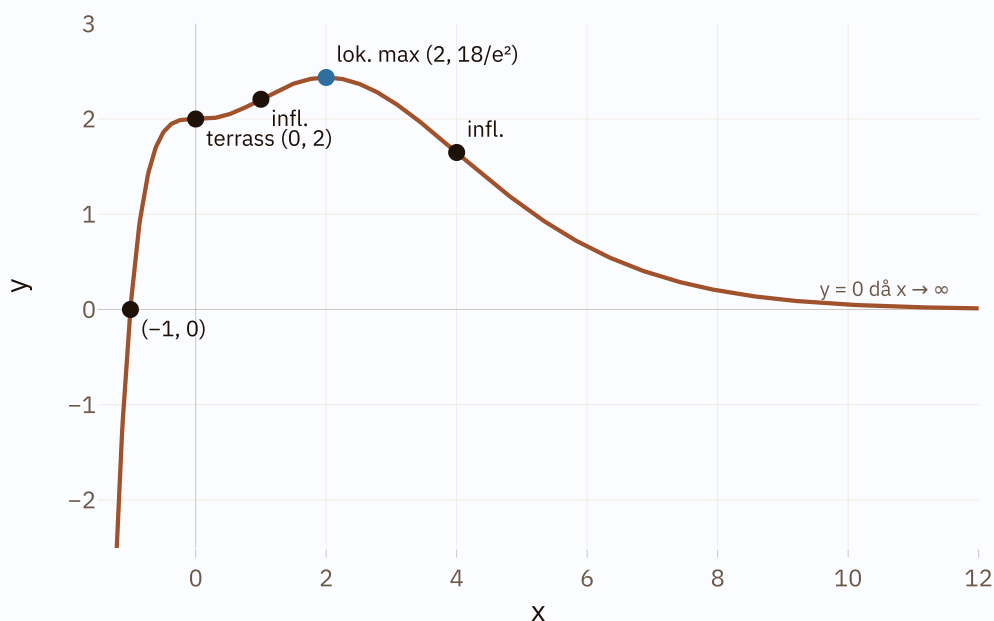
asymptot $y = 0$ då $x \rightarrow \infty$; inga andra asymptoter

Värdemängd. f är växande på $(-\infty, 2]$ och avtagande på $[2, \infty)$, så $f(2) = \frac{18}{e^2}$ är globalt maximum. Eftersom $f \rightarrow -\infty$ åt vänster och f är kontinuerlig antas alla värden under maximum:

$$R(f) = (-\infty, \frac{18}{e^2}]$$

Nollstället är $x = -1$; $f(x) < 0$ för $x < -1$ och $f(x) > 0$ för $x > -1$, eftersom $x^2 + 2 > 0$ och $e^{-x} > 0$.

Skiss.



Kontrollerat mot facit.

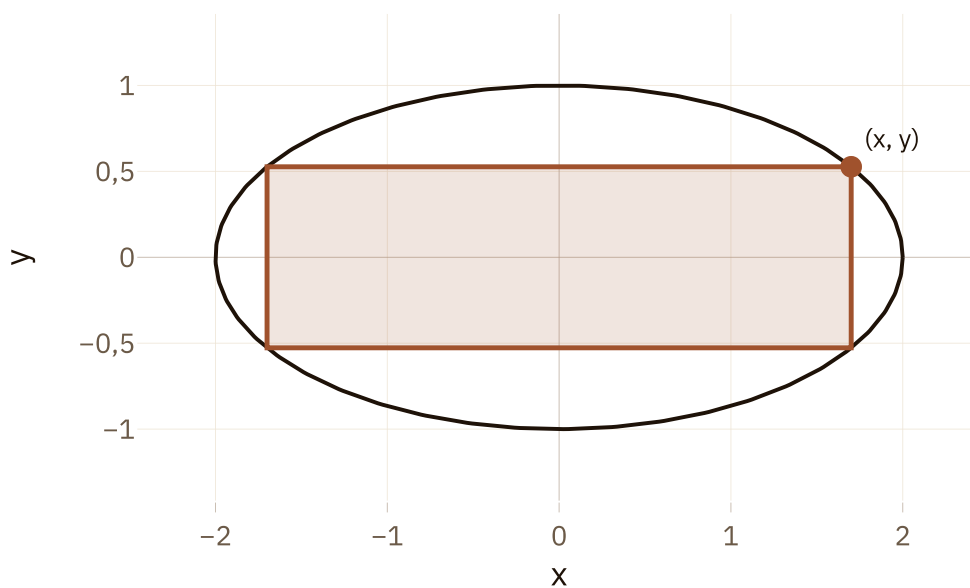
6. Rektangel med största omkrets i en ellips

En rektangel skall inskrivas i ellipsen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

se nedanstående figur.

Hur skall rektangelns sidor väljas för att dess omkrets ska maximeras? Vad är den maximala omkretsen av denna inskrivna rektangel?



Figuren är omritad efter originalet (hörnnet här godtyckligt valt).

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En optimeringsuppgift: **största värde** av en kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall.

Ledtråd 2

Låt hörnet i första kvadranten vara (x, y) med $0 \leq x \leq 2$. Då är $y = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ och omkretsen $P(x) = 4x + 4y = 4x + 2\sqrt{4-x^2}$.

Ledtråd 3

$P'(x) = 4 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \iff 2\sqrt{4-x^2} = x$. Jämför det kritiska värdet med ändpunkterna $P(0)$ och $P(2)$.

Lösning

Rektangeln är symmetrisk kring axlarna. Låt hörnet i första kvadranten vara (x, y) på ellipsen, med $0 \leq x \leq 2$. Då är $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$, sidorna är $2x$ och $2y$, och omkretsen är

$$P(x) = 2(2x + 2y) = 4x + 2\sqrt{4-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

P är kontinuerlig på det slutna, begränsade intervallet, så ett största värde finns. Ändpunkterna ger $P(0) = 4$ och $P(2) = 8$. För $0 < x < 2$ är

$$P'(x) = 4 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \iff 2\sqrt{4-x^2} = x \iff 4(4-x^2) = x^2 \iff x^2 = \frac{16}{5}$$

med $x > 0$, alltså $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Då är $y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ och

$$P\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \frac{16}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$$

Eftersom $4\sqrt{5} = \sqrt{80} > \sqrt{64} = 8$ är detta större än båda ändpunktsvärdena, så maximum antas här. (Också $P''(x) = -\frac{8}{(4-x^2)^{3/2}} < 0$.)

Rektangelns sidor är $2x$ och $2y$:

sidorna $\frac{8}{\sqrt{5}}$ och $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $P_{\max} = 4\sqrt{5}$ l.e.

Hörnen ligger alltså i $(\pm \frac{4}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}})$.

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning anger "sidor" $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ och $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$; det är halva sidorna (hörnets koordinater), och omkretsen $4\sqrt{5}$ stämmer.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Deriveringsregler](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Trigonometri](#)
- [Derivata](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Andraderivata och konvexitet](#)