

# M0047M-2024-08-21

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

**Kurs:** M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2024-08-21 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m\_240821.pdf, m0047m\_240821sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

## Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för  $\sum_{k=1}^n k! \cdot k = (n+1)! - 1$
- Uppgift 2: tre gränsvärden: ensidiga gränsvärden av en rot, bestämning av en konstant och absolutbelopp
- Uppgift 3: parabeln  $y = Cx^2$  och ellipsen  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  skär varandra under rät vinkel
- Uppgift 4: inverterbarhet, invers och inversens derivata för  $x^3 + 9x - 16$
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkter, asymptoter och värdemängd för  $\frac{2x^2 - 6}{x - 2}$
- Uppgift 6: största rektangeln inskriven i ellipsen  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

## Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

## 1. Induktionsbevis för en summa med fakulteter

Formeln

$$\sum_{k=1}^n k! \cdot k = (n+1)! - 1$$

gäller för alla positiva heltal  $n$ . Bevisa detta, till exempel med induktion.

Totalpoäng: 5

### Ledtråd 1

Ett bevis med **matematisk induktion** för en **summa**.

### Ledtråd 2

Visa basfallet  $n = 1$ . Anta sedan att formeln gäller för  $n = p$  och dela upp summan till  $p + 1$  som summan till  $p$  plus den sista termen  $(p + 1)! \cdot (p + 1)$ .

### Ledtråd 3

Bryt ut  $(p + 1)!$  och använd  $(p + 1)! \cdot (p + 2) = (p + 2)!$ .

### Lösning

**Basfall**  $n = 1$ :

$$VL = 1! \cdot 1 = 1, \quad HL = 2! - 1 = 1$$

så formeln gäller.

**Induktionssteg.** Anta att formeln gäller för  $n = p$  (induktionsantagandet):

$$\sum_{k=1}^p k! \cdot k = (p + 1)! - 1$$

Vi ska visa att den då gäller för  $n = p + 1$ , alltså att summan är  $(p + 2)! - 1$ .

Med induktionsantagandet:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} k! \cdot k &= \left( \sum_{k=1}^p k! \cdot k \right) + (p + 1)! \cdot (p + 1) = (p + 1)! - 1 + (p + 1)! \cdot (p + 1) \\ &= (p + 1)! \cdot (1 + (p + 1)) - 1 = (p + 1)! \cdot (p + 2) - 1 = (p + 2)! - 1 \end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller formeln därför för alla  $n = 1, 2, 3, \dots$  ■

**Alternativt bevis (teleskopsumma).** Eftersom  $k! \cdot k = ((k + 1) - 1)k! = (k + 1)! - k!$  blir

$$\sum_{k=1}^n k! \cdot k = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \dots + ((n + 1)! - n!) = (n + 1)! - 1! = (n + 1)! - 1$$

$$\sum_{k=1}^n k! \cdot k = (n+1)! - 1 \text{ för alla } n \geq 1$$

Kontrollerat mot facit.

## 2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a) Höger- respektive vänstergränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2 - x}.$$

(2p)

(b) Bestäm konstanten  $a$  så att

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 - 8x + 12} = 3.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3x - 6| - |x + 2|}{x - 1}.$$

(2p)

Totalpoäng: 6

### Ledtråd 1

Tre **gränsvärden**: (a) handlar om var funktionen är definierad (**Kontinuitet**), (b) och (c) är av typen  $\frac{0}{0}$  som ska förenklas.

### Ledtråd 2

(a) Bestäm tecknet på  $x^2 - x = x(x - 1)$  nära 0 på varje sida. (b) Faktorisera nämnaren; täljaren  $(x - a)(x + a)$  går mot 0, så nämnaren måste också innehålla faktorn  $x - a$ . (c) Skriv beloppen utan beloppstecken för  $x$  nära 1.

### Ledtråd 3

(a)  $x(x-1) < 0$  för  $0 < x < 1$ . (b)  $x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$ , så  $a = 2$  eller  $a = 6$ ; pröva båda. (c) Nära  $x = 1$  är  $|3x-6| = 6-3x$  och  $|x+2| = x+2$ .

### Lösning

(a)  $x^2 - x = x(x-1)$ . För  $0 < x < 1$  är  $x > 0$  och  $x-1 < 0$ , så  $x^2 - x < 0$  och roten är inte definierad direkt till höger om 0. Högergränsvärdet existerar därför inte.

För  $x < 0$  är båda faktorerna negativa, så  $x^2 - x > 0$ . Funktionen är definierad och kontinuerlig från vänster i 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2 - x} = \sqrt{0^2 - 0} = 0$$

$$\text{högergränsvärdet existerar ej, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2 - x} = 0$$

(b) Täljaren  $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a) \rightarrow 0$  när  $x \rightarrow a$ . För att gränsvärdet ska bli  $3 \neq 0$  måste nämnaren också gå mot 0, dvs. innehålla faktorn  $x-a$ . Eftersom  $x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$  måste  $a = 2$  eller  $a = 6$ .

$$a = 2: \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-6} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$a = 6: \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(x+6)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+6}{x-2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\boxed{a = 6}$$

(c) Typen är  $\frac{0}{0}$ .  $|3x-6| = 6-3x$  för  $x < 2$  och  $|x+2| = x+2$  för  $x \geq -2$ . Eftersom  $-2 < 1 < 2$  gäller båda nära  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(6-3x) - (x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x-1)}{x-1} = \boxed{-4}$$

Kontrollerat mot facit.

## 3. Parabel och ellips som skär varandra vinkelrätt

Visa att parabeln

$$y = Cx^2$$

och ellipsen

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

skär varandra under räta vinklar för alla värden på parametern  $C \in \mathbb{R}$ .

Totalpoäng: 5

### Ledtråd 1

Två kurvor skär varandra under rät vinkel om tangenterna i skärningspunkten är vinkelräta. Ellipsens lutning fås med **implicit derivering**.

### Ledtråd 2

Visa först att skärningspunkter  $(a, b)$  finns. Beräkna sedan parabelns lutning  $k_1 = 2Ca$  och ellipsens lutning  $k_2$  i  $(a, b)$ , och visa att  $k_1 k_2 = -1$ . Behandla  $C = 0$  separat.

### Ledtråd 3

Implicit derivering ger  $x + 2yy' = 0$ , alltså  $k_2 = -\frac{a}{2b}$ . Använd  $b = Ca^2$  i produkten.

### Lösning

**Fallet  $C \neq 0$ . Skärningspunkter.** En skärningspunkt  $(a, b)$  uppfyller  $\frac{a^2}{2} + b^2 = 1$  och  $b = Ca^2$ .

Insättning ger en andragradsekvation i  $a^2$ :

$$C^2(a^2)^2 + \frac{1}{2}a^2 - 1 = 0 \iff a^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16C^2}}{4C^2}$$

Eftersom  $a^2 > 0$  måste plustecknet gälla:

$$a^2 = \frac{\sqrt{1 + 16C^2} - 1}{4C^2} > 0$$

Kurvorna skär alltså varandra i exakt två punkter  $(\pm a, Ca^2)$ , och där är  $b = Ca^2 \neq 0$ .

**Lutningar.** Parabelns tangent i  $(a, b)$  har lutningen

$$k_1 = \left. \frac{d}{dx}(Cx^2) \right|_{x=a} = 2Ca$$

Implicit derivering av ellipsens ekvation med  $y = y(x)$  ger

$$x + 2yy' = 0 \iff y' = -\frac{x}{2y}$$

så ellipsens tangent i  $(a, b)$  har lutningen  $k_2 = -\frac{a}{2b}$ . Produkten är

$$k_1 k_2 = 2Ca \cdot \left(-\frac{a}{2b}\right) = -\frac{2Ca^2}{2b} = -\frac{b}{b} = -1$$

eftersom  $b = Ca^2$ . Tangenterna är alltså vinkelräta.

**Fallet  $C = 0$ .** Parabeln är då linjen  $y = 0$ , som skär ellipsen i  $(\pm\sqrt{2}, 0)$ . Där har ellipsen lodrät tangent (implicit derivering ger  $x dx + 2y dy = 0$ , dvs.  $dx = 0$  när  $y = 0$ ), medan linjen  $y = 0$  är vågrät. Även här är vinkeln rät.

$$k_1 k_2 = -1 \text{ i varje skärningspunkt } \text{d} \ddot{a} \ C \neq 0; \text{ vågrät mot lodrät tangent } \text{d} \ddot{a} \ C = 0$$

*Kontrollerat mot facit.*

#### 4. Inversen till $x^3 + 9x - 16$

Låt

$$f(x) = x^3 + 9x - 16, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att funktionen är inverterbar. (1p)

(b) Finn

$$f^{-1}(10).$$

(2p)

(c) Beräkna

$$(f^{-1})'(10).$$

(2p)

*Totalpoäng: 5*

### Ledtråd 1

Inversa funktioner och inversens derivata.

### Ledtråd 2

(a) En strängt växande funktion är injektiv; undersök tecknet på  $f'$ . (b)  $f^{-1}(10) = y \iff f(y) = 10$ . (c)  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$  där  $y = f^{-1}(x)$ .

### Ledtråd 3

(b) Ekvationen  $y^3 + 9y - 26 = 0$  har en heltalsrot som syns direkt. (c) Sätt in den roten i  $f'(y) = 3y^2 + 9$ , inte  $x = 10$ .

### Lösning

(a)  $f'(x) = 3x^2 + 9 \geq 9 > 0$  för alla  $x$ , så  $f$  är strängt växande på  $\mathbb{R}$  och därmed injektiv (1-1). Alltså är  $f$  inverterbar.

(b)  $y = f^{-1}(10) \iff f(y) = 10$ :

$$y^3 + 9y - 16 = 10 \iff y^3 + 9y - 26 = 0$$

$y = 2$  är en lösning:  $8 + 18 - 26 = 0$ . Eftersom  $f$  är injektiv finns ingen annan (polynomdivision ger också  $y^3 + 9y - 26 = (y - 2)(y^2 + 2y + 13)$  där  $y^2 + 2y + 13 = (y + 1)^2 + 12 > 0$ ).

$$\boxed{f^{-1}(10) = 2}$$

(c) Implicit derivering av  $x = f(y)$  med avseende på  $x$  ger  $1 = f'(y)y'$ , alltså

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3y^2 + 9}$$

I  $x = 10$  är  $y = 2$ :

$$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{3 \cdot 2^2 + 9} = \boxed{\frac{1}{21}}$$

Kontrollerat mot facit.

## 5. Kurvan $\frac{2x^2 - 6}{x - 2}$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Ange funktionens värdemängd  $R(f)$ . Skissera kurvan.

Totalpoäng: 5

### Ledtråd 1

**Kurvundersökning** av en rationell funktion: **extremvärden** med förstaderivatan och **konvexitet** med andraderivatan.

### Ledtråd 2

Polynomdividera för att hitta den sneda asymptoten. Nämnarens nollställe ger en lodrät asymptot. Derivera med kvotregeln och faktorisera.

### Ledtråd 3

$$f(x) = 2x + 4 + \frac{2}{x - 2}, \text{ vilket ger } f'(x) = 2 - \frac{2}{(x - 2)^2} = \frac{2(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)^2} \text{ och } f''(x) = \frac{4}{(x - 2)^3}.$$

### Lösning

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Nollställena:  $2x^2 - 6 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$ . Skärning med y-axeln:  $f(0) = 3$ .

**Asymptoter.** Polynomdivision:

$$f(x) = \frac{2x(x - 2) + 4(x - 2) + 2}{x - 2} = 2x + 4 + \frac{2}{x - 2}$$

Eftersom  $\frac{2}{x-2} \rightarrow 0$  när  $x \rightarrow \pm\infty$  är  $y = 2x + 4$  en sned asymptot åt båda hållen. Täljaren går mot  $2 \cdot 4 - 6 = 2 > 0$  när  $x \rightarrow 2$ , så

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

och  $x = 2$  är en lodrät asymptot. Vågräta asymptoter saknas.

### Derivator.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2)^2 - 2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x-2)^2} = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$$

Kritiska punkter:  $x = 1$  och  $x = 3$ .  $f''$  har inga nollställan.

|           | $x < 1$ | 1        | $1 < x < 2$ | 2        | $2 < x < 3$ | 3    |
|-----------|---------|----------|-------------|----------|-------------|------|
| $2(x-1)$  | –       | 0        | +           | +        | +           | +    |
| $x-3$     | –       | –        | –           | –        | –           | 0    |
| $(x-2)^2$ | +       | +        | +           | 0        | +           | +    |
| $f'(x)$   | +       | 0        | –           | odef.    | –           | 0    |
| $f(x)$    | ↗       | lok. max | ↘           | asymptot | ↘           | lok. |

|          | $x < 2$ | 2        | $x > 2$ |
|----------|---------|----------|---------|
| $f''(x)$ | –       | odef.    | +       |
| $f(x)$   | konkav  | asymptot | konvex  |

$$f(1) = \frac{2-6}{-1} = 4, \quad f(3) = \frac{18-6}{1} = 12$$

lok. max  $f(1) = 4$ , lok. min  $f(3) = 12$ , inga inflexionspunkter

asymptoter:  $x = 2$  (lodrät) och  $y = 2x + 4$  (sned, då  $x \rightarrow \pm\infty$ )

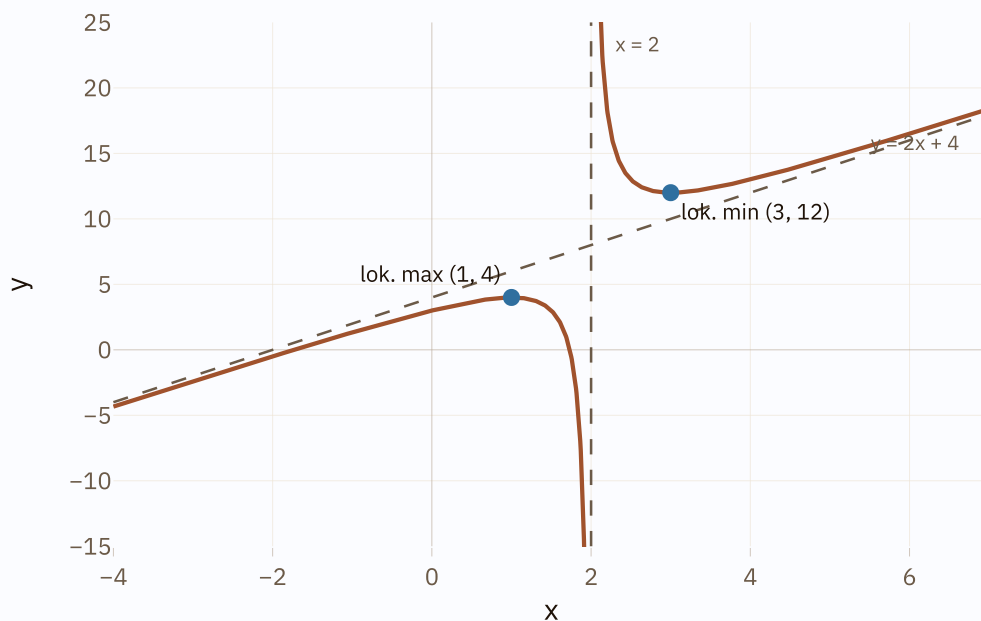
Konvexiteten byter visserligen tecken vid  $x = 2$ , men där är  $f$  inte definierad, så det är ingen inflexionspunkt.

**Värdemängd.** På  $(-\infty, 2)$  växer  $f$  från  $-\infty$  till 4 och avtar sedan mot  $-\infty$ , så värdena är  $(-\infty, 4]$ . På  $(2, \infty)$  avtar  $f$  från  $+\infty$  till 12 och växer sedan mot  $+\infty$ , så värdena är  $[12, \infty)$ .

$$R(f) = (-\infty, 4] \cup [12, \infty) = \mathbb{R} \setminus (4, 12)$$

Kontroll:  $f(x) = y \iff 2x^2 - yx + 2y - 6 = 0$  har reell lösning precis när diskriminanten  $y^2 - 16y + 48 = (y - 4)(y - 12) \geq 0$ .

**Skiss.** Kurvan har två grenar. Den vänstra ligger under den sneda asymptoten, går upp till toppen  $(1, 4)$  och störtar mot  $-\infty$  vid  $x = 2$ . Den högra ligger över asymptoten, kommer ner från  $+\infty$  vid  $x = 2$  till botten  $(3, 12)$  och följer sedan  $y = 2x + 4$  uppåt.



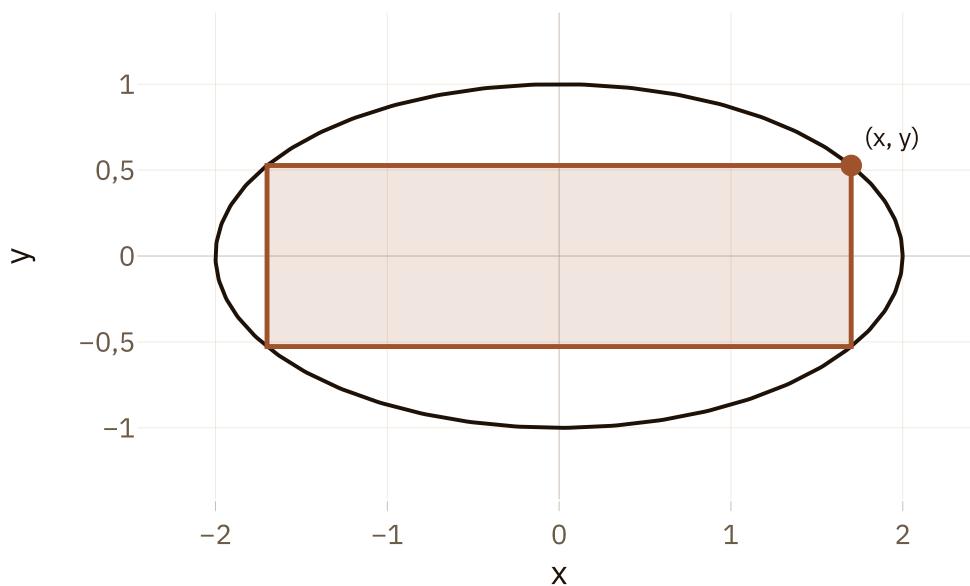
Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning skriver av misstag  $f(4)$  för minimivärdet, men räknar  $f(3) = 12$ ; värdet är detsamma.

## 6. Största rektangeln i en ellips

En rektangel skall inskrivas i ellipsen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

se nedanstående figur.



Figuren är omritad efter originalet (hörnet här godtyckligt valt).

Hur skall rektangelns sidor väljas för att dess area ska maximeras? Vad är den maximala arean av denna inskrivna rektangel?

Totalpoäng: 5

#### Ledtråd 1

En optimeringsuppgift: **största värde** av en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall.

#### Ledtråd 2

Låt  $(x, y)$  vara hörnet i första kvadranten. Då har rektangeln sidorna  $2x$  och  $2y$ , och  $y = \sqrt{1 - x^2/4}$ . Maximera  $A(x) = 4x\sqrt{1 - x^2/4} = 2x\sqrt{4 - x^2}$  på  $[0, 2]$ .

#### Ledtråd 3

$$A'(x) = \frac{2(4 - 2x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}, \text{ som är noll för } x^2 = 2. \text{ Ändpunkterna ger } A = 0.$$

 Lösning

Av symmetri ligger rektangelns hörn i  $(\pm x, \pm y)$  där  $(x, y)$  är ett hörn på ellipsen i första kvadranten. Då är

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

och rektangelns area är

$$A(x) = 2x \cdot 2y = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

$A$  är kontinuerlig på det slutna intervallet  $[0, 2]$ , så ett största värde finns. I ändpunkterna är  $A(0) = A(2) = 0$ , så maximum antas i en inre punkt. För  $0 < x < 2$  är

$$A'(x) = 2\sqrt{4 - x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2((4 - x^2) - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(4 - 2x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$A'(x) = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$  (den enda kritiska punkten i intervallet). Där är

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

Rektangelns sidor är  $2x = 2\sqrt{2}$  (längs  $x$ -axeln) och  $2y = \sqrt{2}$  (längs  $y$ -axeln):

|                                                          |
|----------------------------------------------------------|
| sidorna $2\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}$ , $A_{\max} = 4$ a.e. |
|----------------------------------------------------------|

Sidorna förhåller sig som halvxaxlarna,  $2 : 1$ . (Alternativt: med  $x = 2 \cos t$ ,  $y = \sin t$  blir  $A = 8 \sin t \cos t = 4 \sin 2t$ , som är störst, 4, för  $t = \frac{\pi}{4}$ .)

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning anger "sidor  $x = \sqrt{2}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ "; det är koordinaterna för hörnet i första kvadranten, alltså halva sidlängderna. Rektangelns sidor är  $2\sqrt{2}$  och  $\sqrt{2}$ , i överensstämmelse med arean 4.

## Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Talföljder och summor](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Kontinuitet](#)
- [Implicit derivering](#)
- [Funktioner och invers](#)

- Inversa funktioners derivata
  - Extremvärden
  - Grafitning och asymptoter
  - Andraderivata och konvexitet
-