

M0047M-2024-05-23

19 okt. 2026, 10 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2024-05-23 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_240523.pdf, m0047m_240523sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: konstanta termen i en binomialutveckling och en binomialsumma
- Uppgift 2: tre gränsvärden: sammansatt exponentialfunktion, faktorisering och dominerande term under en logaritm
- Uppgift 3: bevis av en logaritmlikhet med derivata och rationella gränser för $\ln 2$
- Uppgift 4: Lamberts W-funktion som invers till xe^x och ekvationen $e^{-2x} = 6x$
- Uppgift 5: $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2$: extremvärden, värdemängd och en ekvation
- Uppgift 6: maximal synvinkel mot en tavla på en vägg

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Binomialutveckling

Betrakta binomialutvecklingen

$$\left(x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^5.$$

(a) Bestäm koefficienten för den konstanta termen i denna binomialutveckling. (4p)

(b) Beräkna summan

$$\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-3)^k.$$

(1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Binomialsatsen med **binomialkoefficienter** (Talföljder och summor).

Ledtråd 2

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ med $a = x^3$ och $b = -3/x^2$. Skriv den allmänna termen som en konstant gånger en potens av x .

Ledtråd 3

Den allmänna termen är $\binom{5}{k} (-3)^k x^{15-5k}$. (a) Kräv exponenten 0. (b) Välj ett x så att potensen försvinner.

Lösning

(a) Binomialsatsen ger

$$\left(x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (x^3)^{5-k} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-3)^k x^{15-3k-2k} = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-3)^k x^{15-5k}$$

Termen är konstant när $15 - 5k = 0$, dvs. $k = 3$. Med $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ blir den

$$\binom{5}{3} (-3)^3 = 10 \cdot (-27) = \boxed{-270}$$

(b) Sätt $x = 1$ i utvecklingen ovan. Då är varje potens $1^{15-5k} = 1$, så

$$\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-3)^k = \left(1^3 - \frac{3}{1^2}\right)^5 = (-2)^5 = \boxed{-32}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4x + 4}$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(10^x + e^{2x})}{x}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) använder att e^t är **kontinuerlig** och ett **oegentligt gränsvärde** i exponenten; (b) är ett **gränsvärde** av typen $\frac{0}{0}$ som löses med **faktorisering**; (c) handlar om vilken term som dominerar.

Ledtråd 2

(a) Vad händer med $-1/x^2$ när $x \rightarrow 0$? (b) Både täljare och nämnare är kvadrater. (c) Bryt ut den största termen i logaritmens argument och använd $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Ledtråd 3

(b) $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$. (c) $10 > e^2$, så 10^x dominerar: $\ln(10^x + e^{2x}) = x \ln 10 + \ln(1 + (e^2/10)^x)$.

 Lösning

(a) När $x \rightarrow 0$ går $-\frac{1}{x^2} \rightarrow -\infty$, och eftersom $e^t \rightarrow 0$ då $t \rightarrow -\infty$ är

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \boxed{0}$$

(b) Täljaren är $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2$ och nämnaren är $(x - 2)^2$. Alltså

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2(x + 2)^2}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)^2 = 4^2 = \boxed{16}$$

(c) Eftersom $e < 3$ är $e^2 < 9 < 10$, så $0 < \frac{e^2}{10} < 1$ och $(\frac{e^2}{10})^x \rightarrow 0$. Bryt ut 10^x :

$$\frac{\ln(10^x (1 + (\frac{e^2}{10})^x))}{x} = \frac{x \ln 10 + \ln(1 + (\frac{e^2}{10})^x)}{x} = \ln 10 + \frac{\ln(1 + (\frac{e^2}{10})^x)}{x} \rightarrow \ln 10 + \frac{\ln 1}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(10^x + e^{2x})}{x} = \boxed{\ln 10}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Rationella gränser för $\ln(1 + x)$

Det gäller att

$$\ln(1 + x) < \frac{x^2 + 2x}{2(x + 1)}$$

för $x > 0$.

(a) Visa denna olikhet. (4p)

(b) Man kan även visa (behövs ej) att

$$\ln(1 + x) > \frac{2x}{x + 2}$$

för $x > 0$. Använd denna olikhet tillsammans med olikheten i uppgift 3.(a) för att finna övre och nedre rationella begränsningar av värdet på $\ln 2$. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Olikheter bevisas med **derivata**: en funktion med positiv derivata är växande (**Medelvärdessatsen**).

Ledtråd 2

Bilda $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{2(x+1)} - \ln(1+x)$ för $x \geq 0$. Visa att $g(0) = 0$ och att $g'(x) > 0$ för $x > 0$.

Ledtråd 3

På gemensam nämnare blir $g'(x) = \frac{x^2}{2(x+1)^2}$. I (b): sätt $x = 1$.

Lösning

(a) Låt

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x}{2(x+1)} - \ln(x+1), \quad x \geq 0.$$

Olikheten betyder att $g(x) > 0$ för $x > 0$. Kvotregeln ger

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+2x+2}{2(x+1)^2} - \frac{2(x+1)}{2(x+1)^2} = \frac{x^2}{2(x+1)^2}$$

Alltså är $g'(x) > 0$ för $x > 0$, och g är kontinuerlig på $[0, \infty)$. Därför är g strängt växande på $[0, \infty)$, och för $x > 0$ gäller

$$g(x) > g(0) = \frac{0}{2} - \ln 1 = 0$$

vilket är olikheten. ■

(b) De två olikheterna ger tillsammans

$$\frac{2x}{x+2} < \ln(1+x) < \frac{x^2+2x}{2(x+1)}, \quad x > 0.$$

Med $x = 1$:

$$\boxed{\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{3}{4}}$$

(Som kontroll: $\ln 2 \approx 0,693$, $\frac{2}{3} \approx 0,667$ och $\frac{3}{4} = 0,75$.)

Den nedre olikheten visas på samma sätt: $h(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$ har $h(0) = 0$ och $h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ för $x > 0$.

Kontrollerat mot facit.

4. Lamberts W-funktion

Låt

$$f(x) = xe^x, \quad -1 \leq x < \infty.$$

Man kan visa (behövs ej) att denna funktion är injektiv och därför har invers. Vi kallar denna invers *Lamberts W-funktion* W , dvs. $W(x) = f^{-1}(x)$, $x \in D(W) = [-\frac{1}{e}, \infty)$.

(a) Förenkla

$$W(3)e^{W(3)}.$$

Motivera! (1p)

(b) Förenkla $W\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$. Motivera! (1p)

(c) Motivera, med text och figur, varför ekvationen

$$e^{-2x} = 6x$$

har exakt en lösning x_0 som dessutom är positiv. (1p)

(d) Finn lösningen x_0 till ekvationen i uppgift 4.(c) uttryckt i Lamberts W-funktion. **Ledning:** Kom ihåg att $W(t)$ är invers till $f(t) = te^t$. (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En uppgift om **invers funktion**: W är definierad som inversen till xe^x , så allt följer av $f(W(x)) = x$ och $W(f(x)) = x$. (c) är en **ekvation** där man räknar skärningspunkter mellan två kurvor.

Ledtråd 2

(a) och (b): använd $f(W(x)) = x$ respektive leta efter ett $t \geq -1$ med $te^t = \frac{\sqrt{e}}{2}$. (c) Jämför en strängt avtagande och en strängt växande funktion. (d) Skriv om ekvationen till formen $ue^u = \text{konstant}$.

Ledtråd 3

(b) Pröva $t = \frac{1}{2}$. (d) Multiplicera $e^{-2x} = 6x$ med e^{2x} och dela med 3: $2xe^{2x} = \frac{1}{3}$.

Lösning

(a) Eftersom W är inversen till $f(x) = xe^x$ gäller $f(W(x)) = W(x)e^{W(x)} = x$ för alla $x \in D(W)$. Med $x = 3 \in D(W)$:

$$W(3)e^{W(3)} = 3$$

(b) $\frac{1}{2} \geq -1$ ligger i $D(f)$ och $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{1/2} = \frac{\sqrt{e}}{2}$. Eftersom $W = f^{-1}$ är

$$W\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

(c) Låt $h(x) = e^{-2x}$ och $k(x) = 6x$ för $x \in \mathbb{R}$. Båda är kontinuerliga. Bilda $g(x) = 6x - e^{-2x}$. Då är

$$g'(x) = 6 + 2e^{-2x} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$$

så g är strängt växande och kontinuerlig med värdemängd $\mathbb{R}$. Då har $g(x) = 0$, dvs. $e^{-2x} = 6x$, exakt en lösning x_0 . Geometriskt: den strängt avtagande kurvan $y = e^{-2x}$ och den strängt växande linjen $y = 6x$ skär varandra i exakt en punkt. Eftersom $e^{-2x} > 0$ för alla x måste $6x_0 = e^{-2x_0} > 0$, alltså $x_0 > 0$.

(d) Multiplicera med e^{2x} och dela med 3:

$$e^{-2x} = 6x \iff 1 = 6x e^{2x} \iff \frac{1}{3} = (2x) e^{2x} = f(2x)$$

Eftersom $x_0 > 0$ är $2x_0 \geq -1$, och $\frac{1}{3} \in D(W)$. Att tillämpa W på båda led ger $W\left(\frac{1}{3}\right) = 2x_0$:

$$x_0 = \frac{1}{2} W\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,129$$

Kontrollerat mot facit.

5. Funktionen $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2$

Betrakta funktionen

$$f(x) = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2, \quad x \in [-1, 1].$$

(a) Beräkna $f'(x)$ och ställ upp ordentligt teckenschema för derivatan. Bestäm lokala extremvärden och skissera kurvan. **Ledning:** identiteten

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

för $x \in [-1, 1]$ kan vara till hjälp. (3p)

(b) Ange funktionens värdemängd $R(f)$. (1p)

(c) Finn om möjligt alla $x \in [-1, 1]$ för vilka

$$(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = 1.$$

Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Extremvärden för en funktion byggd av arcusfunktioner, med deras derivator. Glöm inte ändpunkterna.

Ledtråd 2

Sätt in $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Då blir f ett andragradsuttryck i $u = \arcsin x$, och

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ledtråd 3

$f'(x) = \frac{4 \arcsin x - \pi}{\sqrt{1-x^2}}$, som är noll där $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$. Jämför f i den punkten med $f(\pm 1)$.

Lösning

(a) Med $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ blir

$$f(x) = (\arcsin x)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)^2 = 2(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x + \frac{\pi^2}{4}$$

Kedjeregeln ger, för $-1 < x < 1$,

$$f'(x) = \frac{4 \arcsin x - \pi}{\sqrt{1-x^2}}$$

I ändpunkterna $x = \pm 1$ saknas derivata. Kritisk punkt: $4 \arcsin x = \pi \iff \arcsin x = \frac{\pi}{4} \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Eftersom $\arcsin$ är strängt växande är $4 \arcsin x - \pi < 0$ för $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ och > 0 för $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

	-1	$-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$	1
$4 \arcsin x - \pi$	-	-	0	+	+
$\sqrt{1-x^2}$	0	+	+	+	0
$f'(x)$	odef.	-	0	+	odef.
$f(x)$	lok. max	↘	lok. min	↗	lok. max

Värdena, direkt ur definitionen med $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ och $\arccos 1 = 0$:

$$f(-1) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi^2 = \frac{5\pi^2}{4}, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8}, \quad f(1) = \frac{\pi^2}{4} + 0 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\text{lok. min } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8}, \quad \text{lok. max } f(-1) = \frac{5\pi^2}{4} \text{ och } f(1) = \frac{\pi^2}{4}$$

Kvadratkomplettering bekräftar minimum: $f(x) = 2\left(\arcsin x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{8}$. Kurvan skär y -axeln i $f(0) = \frac{\pi^2}{4}$ och aldrig x -axeln.

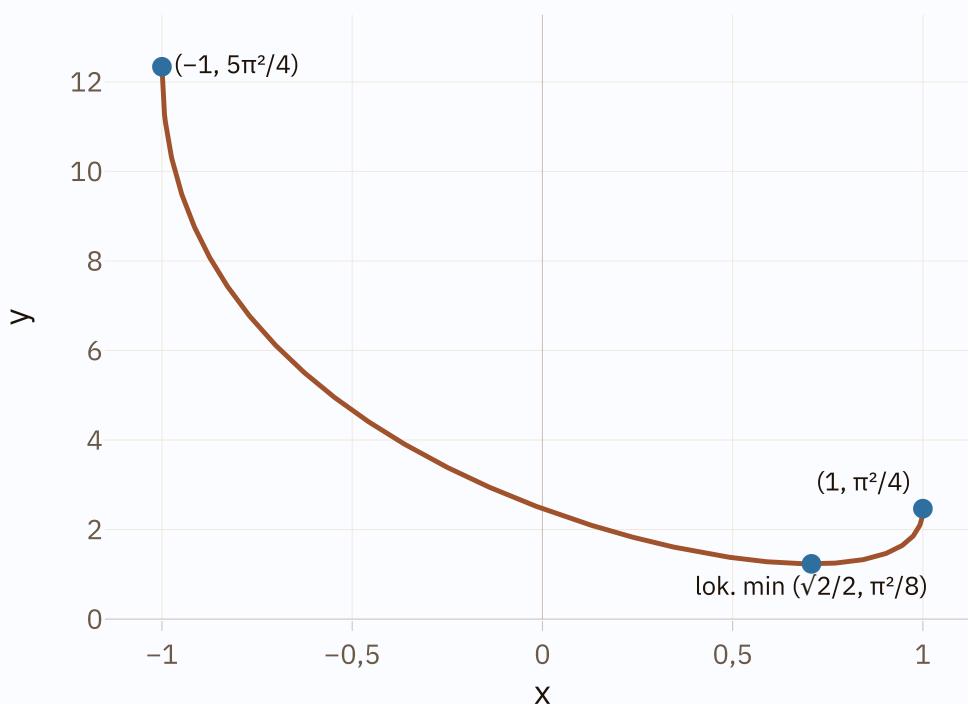
(b) f är kontinuerlig på $[-1, 1]$ med minsta värde $\frac{\pi^2}{8}$ och största värde $\frac{5\pi^2}{4}$ (det största av ändpunktsvärdena), så

$$R(f) = \left[\frac{\pi^2}{8}, \frac{5\pi^2}{4}\right]$$

(c) Eftersom $\pi > 3$ är $\frac{\pi^2}{8} > \frac{9}{8} > 1$. Talet 1 ligger alltså under funktionens minsta värde och tillhör inte $R(f)$:

$$\text{Det finns inget } x \in [-1, 1] \text{ med } (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = 1.$$

Skiss.



Kontrollerat mot facit.

6. Maximal synvinkel mot en tavla

En stor tavla hänger på en lodrät vägg. På vilket horisontellt avstånd från väggen skall man stå för att se tavlan under maximal synvinkel om tavlan är 2 meter hög och tavlans nedre kant befinner sig 1 meter över ögonnivå?

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En optimeringsuppgift: ställ upp synvinkeln som funktion av avståndet och sök dess **största värde** med hjälp av **arctan**.

Ledtråd 2

På avståndet x ser ögat tavlans överkant (3 m upp) under vinkeln $\arctan \frac{3}{x}$ och underkanten (1 m upp) under $\arctan \frac{1}{x}$. Synvinkeln är skillnaden.

Ledtråd 3

$$\theta'(x) = \frac{2(3-x^2)}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Kontrollera också vad θ går mot när $x \rightarrow 0^+$ och $x \rightarrow \infty$.

Lösning

Låt $x > 0$ vara avståndet till väggen. Tavlans överkant ligger 3 m och underkanten 1 m över ögonhöjd, så synvinkeln är

$$\theta(x) = \arctan \frac{3}{x} - \arctan \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Ändbeteende:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = \arctan 0 - \arctan 0 = 0$$

så maximum antas för något ändligt $x > 0$. Derivatan:

$$\theta'(x) = \frac{1}{1 + \frac{9}{x^2}} \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right) - \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2 + 9} + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{2(3-x^2)}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

Singulära punkter saknas. Den enda kritiska punkten med $x > 0$ är $x = \sqrt{3}$; där byter θ' tecken från + till -, så det är ett maximum:

$$\theta(\sqrt{3}) = \arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \sqrt{3} \text{ m} \approx 1,73 \text{ m}, \quad \theta_{\max} = \frac{\pi}{6}$$

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
 - [Binomialkoefficient](#)
 - [Talföljder och summor](#)
 - [Gränsvärden](#)
 - [Oegentliga gränsvärden](#)
 - [Kontinuitet](#)
 - [Polynom och faktorisering](#)
 - [Derivata](#)
 - [Medelvårdessatsen](#)
 - [Funktioner och invers](#)
 - [Ekvationslösning med derivata](#)
 - [Arcusfunktioner](#)
 - [Elementära funktioners derivator](#)
 - [Extremvärden](#)
-