

M0047M-2024-03-21

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2024-03-21 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_240321.pdf, m0047m_240321sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för formeln för n :te derivatan av $\cos x$
- Uppgift 2: tre gränsvärden: $(3x)^x$ då $x \rightarrow 0^+$, en skillnad av rationella uttryck och en kvot av logaritmer
- Uppgift 3: derivatan av $\arctan x + \arctan \frac{x+1}{x-1}$ och funktionens konstanta värden
- Uppgift 4: ett tredjegradspolynoms enda nollställe: satsen om mellanliggande värden, injektivitet och ett steg med Newton–Raphson
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkter, asymptoter och värdemängd för $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 4}$
- Uppgift 6: relaterade hastigheter, skuggan av en mur från en motorcykels strålkastare

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Derivatorna av $\cos x$ genom induktion

Visa att

$$\frac{d^n}{dx^n}(\cos x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

för varje heltal $n = 1, 2, 3, \dots$ (5p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1

Ett bevis med **induktion**: basfall och induktionssteg, med hjälp av **additionsformeln för cosinus**.

 Ledtråd 2

Basfallet är $n = 1$. Anta att formeln gäller för $n = p$ och derivera en gång till för att få fallet $n = p + 1$.

 Ledtråd 3

Visa att $-\sin u = \cos(u + \frac{\pi}{2})$ för alla u , med $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ och $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

 Lösning

Hjälpformel. Additionsformeln ger för alla reella u

$$\cos(u + \frac{\pi}{2}) = \cos u \cos \frac{\pi}{2} - \sin u \sin \frac{\pi}{2} = \cos u \cdot 0 - \sin u \cdot 1 = -\sin u$$

Basfall. För $n = 1$ är

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$$

enligt hjälpformeln med $u = x$. Formeln gäller alltså för $n = 1$.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $p \geq 1$, dvs. att

$$\frac{d^p}{dx^p}(\cos x) = \cos(x + \frac{p\pi}{2}) \quad (\text{induktionsantagandet})$$

Då är, med kedjeregeln och hjälpformeln med $u = x + \frac{p\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(\cos x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^p}{dx^p}(\cos x) \right) = \frac{d}{dx} \cos(x + \frac{p\pi}{2}) = -\sin(x + \frac{p\pi}{2}) \\ &= \cos(x + \frac{p\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{(p+1)\pi}{2}) \end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$.

Enligt induktionsprincipen gäller

$$\frac{d^n}{dx^n}(\cos x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ för alla heltal } n \geq 1$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x)^x$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \right)$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + x^2)}{\ln(3^x + x^3)}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden och Oegentliga gränsvärden med standardgränsvärden; skriv potenser med exponentialfunktionen.

Ledtråd 2

(a) $(3x)^x = 3^x \cdot e^{x \ln x}$. (b) Sätt på gemensamt bråkstreck. (c) Bryt ut den dominerande termen 2^x respektive 3^x inuti logaritmerna.

Ledtråd 3

(a) $x \ln x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0^+$. (b) Täljaren blir $-2x^2$. (c) $\ln(2^x + x^2) = x \ln 2 + \ln(1 + \frac{x^2}{2^x})$
och $\frac{x^b}{a^x} \rightarrow 0$ då $a > 1$.

Lösning

(a) För $x > 0$ är $(3x)^x = 3^x \cdot x^x = 3^x \cdot e^{x \ln x}$. Här går $3^x \rightarrow 3^0 = 1$, och standardgränsvärdet $x \ln x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0^+$ ger tillsammans med kontinuiteten hos e^t att $e^{x \ln x} \rightarrow e^0 = 1$. Alltså

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x)^x = 1$$

(b) Gemensamt bråkstreck:

$$\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2(x-1) - x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2x^2}{x^2-1} = \frac{-2}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Då $x \rightarrow \infty$ går $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, så

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \right) = -2$$

(c) Bryt ut den dominerande termen:

$$\frac{\ln(2^x + x^2)}{\ln(3^x + x^3)} = \frac{\ln(2^x(1 + \frac{x^2}{2^x}))}{\ln(3^x(1 + \frac{x^3}{3^x}))} = \frac{x \ln 2 + \ln(1 + \frac{x^2}{2^x})}{x \ln 3 + \ln(1 + \frac{x^3}{3^x})}$$

För $a > 1$ och $b > 0$ är $\frac{x^b}{a^x} = \frac{x^b}{e^{x \ln a}} \rightarrow 0$ (standardgränsvärde: exponentialfunktionen växer snabbare än varje potens). Alltså går båda logaritmerna $\ln(1 + \dots) \rightarrow \ln 1 = 0$. Dela täljare och nämnare med x :

$$\frac{\ln 2 + \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{x^2}{2^x})}{\ln 3 + \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{x^3}{3^x})} \rightarrow \frac{\ln 2 + 0}{\ln 3 + 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + x^2)}{\ln(3^x + x^3)} = \frac{\ln 2}{\ln 3}}$$

Kontrollerat mot facit.

3. En arcustangensidentitet via derivatan

Definiera funktionen

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{x+1}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

(a) Vad är $f'(x)$? Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (2p)

(b) Visa att

$$f(x) = -\frac{\pi}{4}$$

för $x < 1$. (1p)

(c) Funktionen f har även ett konstant värde för $x > 1$. Bestäm detta värde! **Ledning:** undersök vad som händer när $x \rightarrow \infty$. (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Derivering av **Arcusfunktioner** med kedjeregeln (**Deriveringsregler**), och sedan att en funktion med derivatan noll på ett intervall är konstant där (**Medelvärdessatsen**).

Ledtråd 2

$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{u'}{1+u^2}$. Definitionsmängden består av två intervall; på vart och ett är f konstant, men konstanterna kan vara olika.

Ledtråd 3

$(x-1)^2 + (x+1)^2 = 2(x^2 + 1)$. (b) Beräkna $f(0)$. (c) $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ och $\frac{x+1}{x-1} \rightarrow 1$.

Lösning

(a) Med kvotregeln är

$$\frac{d}{dx} \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

så kedjeregeln ger

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(x-1)^2 + (x+1)^2}$$

Nämnamnaren är $x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 + 1)$, så

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2(x^2+1)} = \boxed{0}, \quad x \neq 1$$

(b) Intervallet $(-\infty, 1)$ ingår i definitionsmängden och $f' = 0$ där, så enligt medelvärdessatsen är f konstant på intervallet, $f(x) = C_1$. Med $x = 0$:

$$C_1 = f(0) = \arctan 0 + \arctan(-1) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

Alltså är $\boxed{f(x) = -\frac{\pi}{4} \text{ för } x < 1}$.

(c) På $(1, \infty)$ är också $f' = 0$, så $f(x) = C_2$ där. Konstanten är lika med gränsvärdet i oändligheten.

Eftersom $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1/x}{1-1/x} \rightarrow 1$ och $\arctan$ är kontinuerlig:

$$C_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (\arctan x + \arctan \frac{x+1}{x-1}) = \frac{\pi}{2} + \arctan 1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{3\pi}{4} \text{ för } x > 1}$$

Anmärkning: med $x = 2$ följer identiteten $\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$.

Kontrollerat mot facit.

4. Ett tredjegradspolynoms nollställe

Låt

$$y = p(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 12, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Använd verktyg och begrepp som gränsvärde, injektiv funktion, derivata och satsen om mellanliggande värden för att motivera svaren till nedanstående uppgifter.

- (a) Polynomet p har enbart ett reellt nollställe. Förklara varför! (2p)
- (b) Lokalisera nollstället i uppgift 4.(a) genom att ange i vilket intervall $(n, n + 1)$ (där n är heltal) nollstället ligger. Motivera! (1p)
- (c) Finn en approximation x_1 till detta nollställe genom att göra en iteration med Newton-Raphsons metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Använd någon av intervallgränserna du funnit i uppgift 4.(b) som startvärde x_0 . (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ekvationslösning med derivata: existens via satsen om mellanliggande värden (**Kontinuitet**), entydighet via monotonitet (**injektivitet**).

Ledtråd 2

(a) Undersök $p(x)$ då $x \rightarrow \pm\infty$ och tecknet på $p'(x)$. (b) Beräkna p i några heltal och leta efter ett teckenbyte. (c) Sätt in x_0 i Newtons formel med $f = p$.

Ledtråd 3

Kvadratkomplettera: $p'(x) = 3((x - 2)^2 + 1)$. Jämför $p(1)$ och $p(2)$.

 Lösning

(a) *Existens.* p är ett polynom och därför kontinuerligt på hela $\mathbb{R}$. Vidare är

$$p(x) = x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{15}{x^2} - \frac{12}{x^3} \right)$$

där parentesen går mot 1, så $p(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -\infty$ och $p(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$. Det finns alltså a med $p(a) < 0$ och b med $p(b) > 0$, och satsen om mellanliggande värden ger ett nollställe mellan dem.

Entydighet.

$$p'(x) = 3x^2 - 12x + 15 = 3(x^2 - 4x + 5) = 3((x-2)^2 + 1) \geq 3 > 0$$

så p är strängt växande och därmed injektiv på $\mathbb{R}$. Värdet 0 antas alltså högst en gång. Tillsammans:

p har exakt ett reellt nollställe

(b) Några funktionsvärden:

$$p(0) = -12, \quad p(1) = 1 - 6 + 15 - 12 = -2 < 0, \quad p(2) = 8 - 24 + 30 - 12 = 2 > 0$$

Teckenbytet mellan 1 och 2 ger enligt satsen om mellanliggande värden ett nollställe där, och enligt (a) är det det enda:

nollstället ligger i $(1, 2)$

(Med $p(\frac{3}{2}) = \frac{3}{8} > 0$ ligger det till och med i $(1, \frac{3}{2})$.)

(c) Med $p(1) = -2$ och $p'(1) = 3 - 12 + 15 = 6$ ger startvärdet $x_0 = 1$

$$x_1 = 1 - \frac{p(1)}{p'(1)} = 1 - \frac{-2}{6} = \frac{4}{3}$$

Startvärdet $x_0 = 2$ ger samma sak, eftersom $p(2) = 2$ och $p'(2) = 3$:

$$x_1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$x_1 = \frac{4}{3}$

Anmärkning: ytterligare en iteration ger $x_2 = \frac{164}{117} \approx 1,402$. Det exakta nollstället är $2 + \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} \approx 1,404$ (substitutionen $x = t + 2$ ger $t^3 + 3t + 2 = 0$, som löses med Cardanos formel).

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 4}$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 4}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Ange funktionens värdemängd $R(f)$. Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: asymptoter, teckenschema för derivatan och andraderivatan för inflexionspunkter.

Ledtråd 2

Skriv om $f(x) = 1 - \frac{5x}{x^2 + 4}$; det förenklar både gränsvärdena och deriveringen. Nämnaren är aldrig noll.

Ledtråd 3

$$f'(x) = \frac{5(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2} \text{ och } f''(x) = \frac{-10x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}.$$

Lösning

Omskrivning. $f(x) = \frac{(x^2 + 4) - 5x}{x^2 + 4} = 1 - \frac{5x}{x^2 + 4}$. Eftersom $f(x) - 1$ är udda är grafen symmetrisk kring punkten $(0, 1)$. Täljaren är $(x-1)(x-4)$, så kurvan skär x -axeln i $x = 1$ och $x = 4$, och y -axeln i $f(0) = 1$.

Asymptoter. Nämnaren $x^2 + 4 \geq 4 > 0$, så f är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$: ingen lodrät asymptot. Vidare är

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{5/x}{1 + 4/x^2}\right) = 1$$

så $y = 1$ är vågrät asymptot åt båda hållen, och därmed finns ingen sned asymptot:

vågrät asymptot $y = 1$ då $x \rightarrow \pm\infty$

Derivata.

$$f'(x) = -\frac{5(x^2 + 4) - 5x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{5x^2 - 20}{(x^2 + 4)^2} = \frac{5(x-2)(x+2)}{(x^2 + 4)^2}$$

Kritiska punkter: $x = \pm 2$.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 2$	2	$x > 2$
$x + 2$	–	0	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	0	+
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

$$f(-2) = \frac{4 + 10 + 4}{8} = \frac{9}{4}, \quad f(2) = \frac{4 - 10 + 4}{8} = -\frac{1}{4}$$

lok. max $f(-2) = \frac{9}{4}$, lok. min $f(2) = -\frac{1}{4}$

Andraderivata. Derivera $f'(x) = \frac{5x^2 - 20}{(x^2 + 4)^2}$ med kvotregeln och förkorta med $x^2 + 4$:

$$f''(x) = \frac{10x(x^2 + 4) - (5x^2 - 20) \cdot 4x}{(x^2 + 4)^3} = \frac{-10x^3 + 120x}{(x^2 + 4)^3} = \frac{-10x(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{(x^2 + 4)^3}$$

	$x < -2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3} < x < 0$	0	$0 < x < 2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
$-10x$	+	+	+	0	–	–
$x + 2\sqrt{3}$	–	0	+	+	+	+
$x - 2\sqrt{3}$	–	–	–	–	–	0
$f''(x)$	+	0	–	0	+	0

	$x < -2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3} < x < 0$	0	$0 < x < 2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
$f(x)$	konvex	infl.	konkav	infl.	konvex	inf

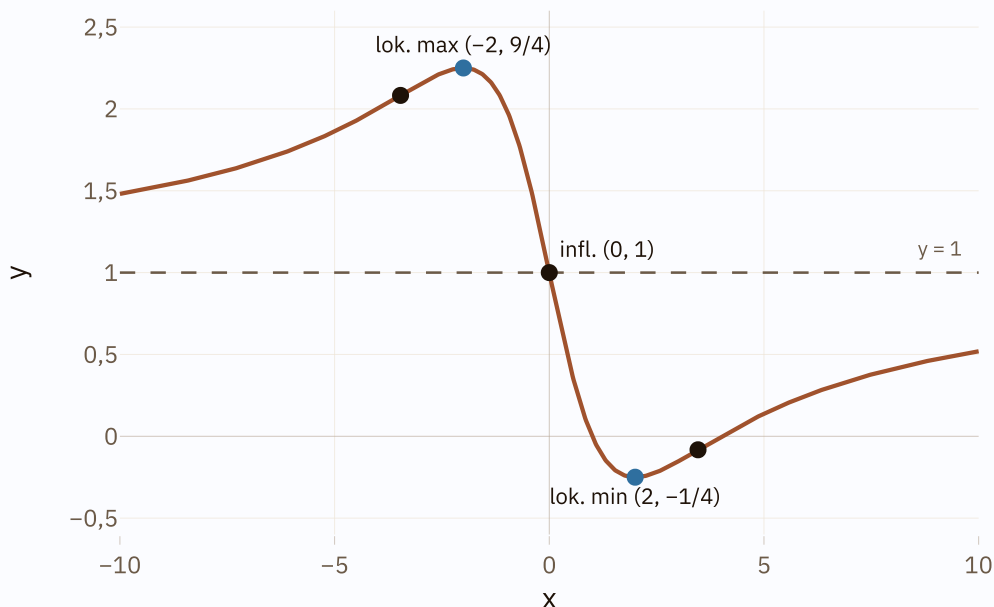
f'' byter tecken i alla tre punkterna. Med $f(x) = 1 - \frac{5x}{x^2 + 4}$ och $x^2 + 4 = 16$ i $x = \pm 2\sqrt{3}$:

$$\text{inflexionspunkter } (0, 1), \quad (-2\sqrt{3}, 1 + \frac{5\sqrt{3}}{8}), \quad (2\sqrt{3}, 1 - \frac{5\sqrt{3}}{8})$$

Värdeområde. På $(-\infty, -2]$ växer f från gränsvärdet 1 till $\frac{9}{4}$, på $[-2, 2]$ avtar f från $\frac{9}{4}$ till $-\frac{1}{4}$, och på $[2, \infty)$ växer f från $-\frac{1}{4}$ mot 1. De lokala extremvärdena är alltså globala, och eftersom f är kontinuerlig antas alla värden däremellan:

$$R(f) = [-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}]$$

Skiss. Kurvan kommer in ovanför asymptoten $y = 1$ från vänster, når maximum $(-2, \frac{9}{4})$, sjunker genom $(0, 1)$ och nollstället $x = 1$ ned till minimum $(2, -\frac{1}{4})$, passerar nollstället $x = 4$ och närmar sig $y = 1$ underifrån då $x \rightarrow \infty$.



Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning anger inflexionspunkternas x -värden men inte deras y -värden; de är tillagda här.

6. Skuggan av en mur

En 3 m hög mur står 2 m från ett högt hus. En motorcykel med strålkastaren på kör i mörkret mot muren och på husväggen ses då skuggan av muren. Motorcykeln kör vinkelrätt mot muren/huset och har sin strålkastare 1 m över marken. Muren kan anses ha försumbar tjocklek.

(a) Härled ett samband mellan skuggans höjd y över marken på väggen och motorcykelns avstånd x från muren. Rita figur! (2p)

(b) Med vilken hastighet rör sig motorcykeln mot muren vid det tillfälle när skuggans överkant är 6 m över marken och rör sig uppåt med en hastighet av 10 m/s? (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Likformiga trianglar och relaterade hastigheter: **Implicit derivering** av sambandet med avseende på tiden.

Ledtråd 2

Ljusstrålen från strålkastaren (höjd 1) över murens krön (höjd 3) träffar husväggen i skuggans överkant. Strålens lutning är densamma fram till muren och fram till väggen.

Ledtråd 3

$\frac{3-1}{x} = \frac{y-1}{x+2}$, vilket ger $y = 3 + \frac{4}{x}$. Derivera med avseende på t och bestäm x ur $y = 6$.

Lösning

(a) Lägg strålkastaren i höjden 1 på avståndet x från muren. Muren står på avståndet x och huset på avståndet $x + 2$. Ljusstrålen som precis passerar murens krön (höjd 3) bestämmer skuggans överkant y på väggen. Strålen stiger $3 - 1 = 2$ m på sträckan x och $y - 1$ m på sträckan $x + 2$, så likformighet (samma lutning $\tan \alpha$) ger

$$\tan \alpha = \frac{2}{x} = \frac{y-1}{x+2} \iff y = 1 + \frac{2(x+2)}{x}$$

$$y = 3 + \frac{4}{x}, \quad x > 0$$

(b) Nu är $x = x(t)$ och $y = y(t)$. Derivering med avseende på t ger

$$y'(t) = -\frac{4x'(t)}{x(t)^2} \iff x'(t) = -\frac{x(t)^2 y'(t)}{4}$$

Vid tidpunkten t_0 är $y(t_0) = 6$, så $6 = 3 + \frac{4}{x(t_0)}$ ger $x(t_0) = \frac{4}{3}$ m. Med $y'(t_0) = 10$ m/s:

$$x'(t_0) = -\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 10}{4} = -\frac{16}{9} \cdot \frac{10}{4} = -\frac{40}{9} \text{ m/s}$$

Minustecknet betyder att avståndet till muren minskar:

$$\text{motorcykeln närmar sig muren med } \frac{40}{9} \text{ m/s} = 16 \text{ km/h}$$

Kontrollerat mot facit.

Se även

- M0065M
- Matematisk induktion
- Trigonometri
- Gränsvärden
- Oegentliga gränsvärden
- Exponentialfunktioner och logaritmer
- Arcusfunktioner
- Deriveringsregler
- Medelvärdessatsen
- Ekvationslösning med derivata
- Kontinuitet
- Extremvärden
- Grafitning och asymptoter
- Andraderivata och konvexitet
- Implicit derivering