

M0047M-2023-12-21

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2023-12-21 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_231221.pdf, m0047m_231221sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för summaformeln $\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}$
- Uppgift 2: tre gränsvärden, $\frac{2^{3x}}{3^{2x}}$ i oändligheten, en trigonometrisk kvot och $x^{1/\sqrt{x}}$ då $x \rightarrow 0^+$
- Uppgift 3: tangent och största/minsta y -värde för Bernoullis lemniskata $(x^2 + y^2)^2 = 32(x^2 - y^2)$ via implicit derivering
- Uppgift 4: normallinjen till $y = x^4$ och dess lägsta skärningspunkt med y -axeln
- Uppgift 5: extremvärden, asymptoter och teckenschema för $\frac{e^{x/2}}{x^2 + x - 2}$, samt MATLAB-plottning
- Uppgift 6: Taylorpolynom för $\arctan x$ och en rationell approximation av π

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. En summaformel med fakulteter

Formeln

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}$$

gäller för alla positiva heltal n . Bevisa detta, till exempel med induktion. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett bevis med **induktion** av en **summaformel**.

Ledtråd 2

Skriv högerledet som $1 - \frac{1}{n!}$. Visa basfallet $n = 1$, anta formeln för $n = p$ och visa den för $n = p + 1$ genom att lägga till termen $k = p + 1$.

Ledtråd 3

Den nya termen är $\frac{p}{(p+1)!}$, och $\frac{1}{p!} = \frac{p+1}{(p+1)!}$ eftersom $(p+1)! = (p+1) \cdot p!$.

Lösning

Högerledet kan skrivas $\frac{n! - 1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$, så vi visar att

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

Basfall. För $n = 1$ är vänsterledet $\frac{1-1}{1!} = 0$ och högerledet $1 - \frac{1}{1!} = 0$. Formeln gäller.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $n = p \geq 1$, dvs. att

$$\sum_{k=1}^p \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{p!} \quad (\text{induktionsantagandet})$$

Då är, med $(p+1)! = (p+1) \cdot p!$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=1}^p \frac{k-1}{k!} + \frac{p}{(p+1)!} = 1 - \frac{1}{p!} + \frac{p}{(p+1)!} \\ &= 1 - \frac{p+1}{(p+1)!} + \frac{p}{(p+1)!} = 1 - \frac{1}{(p+1)!}\end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$.

Enligt induktionsprincipen gäller

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = \frac{n! - 1}{n!} \text{ för alla heltal } n \geq 1$$

Alternativt bevis (teleskopsumma). För $k \geq 1$ är

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$$

så i summan tar termerna ut varandra parvis:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{3x}}{3^{2x}}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 3 \cos x + 2}{1 - \cos x}$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\sqrt{x}}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden och Oegentliga gränsvärden: omskrivning med potenslagar, faktorisering och den användbara identiteten $f = e^{\ln f}$ (Exponentialfunktioner och logaritmer).

Ledtråd 2

(a) Skriv kvoten som en enda potens q^x . (b) Täljaren är ett andragradspolynom i $\cos x$. (c) Skriv $x^{1/\sqrt{x}} = e^{\ln x / \sqrt{x}}$ och använd att e^t är kontinuerlig.

Ledtråd 3

(a) $\frac{2^{3x}}{3^{2x}} = \left(\frac{8}{9}\right)^x$. (b) $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = (\cos x - 1)(\cos x - 2)$. (c) $\ln x \rightarrow -\infty$ och $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$.

Lösning

(a) Med potenslagarna är

$$\frac{2^{3x}}{3^{2x}} = \frac{(2^3)^x}{(3^2)^x} = \left(\frac{8}{9}\right)^x$$

Eftersom $0 < \frac{8}{9} < 1$ går detta mot noll:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{3x}}{3^{2x}} = 0$$

(b) Täljaren är $t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2)$ med $t = \cos x$. För x nära men skilt från 0 är $\cos x \neq 1$, så vi kan förkorta:

$$\frac{(\cos x - 1)(\cos x - 2)}{1 - \cos x} = -(\cos x - 2) = 2 - \cos x$$

Detta är kontinuerligt, så

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 3 \cos x + 2}{1 - \cos x} = 2 - \cos 0 = 1$$

(c) För $x > 0$ är

$$x^{1/\sqrt{x}} = e^{\ln x^{1/\sqrt{x}}} = e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}$$

Då $x \rightarrow 0^+$ går $\ln x \rightarrow -\infty$ och $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$, så produkten $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow -\infty$. (Här behövs inget standardgränsvärde; det är ingen obestämd form.) Eftersom $e^t \rightarrow 0$ när $t \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\sqrt{x}} = 0$$

Kontrollerat mot facit.

3. Bernoullis lemniskata

Ekvationen

$$(x^2 + y^2)^2 = 32(x^2 - y^2)$$

definierar en sluten slät kurva i planet (*Bernoullis lemniskata*), se nedanstående figur.

(a) Finn tangenten till kurvan i punkten $(\sqrt{5}, \sqrt{3})$. (3p)

(b) Hitta största och minsta värdet på y för alla punkter (x, y) på kurvan. (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Implicit derivering: betrakta y som en funktion av x och derivera båda leden. I (b) söker du **Extremvärden** för y längs kurvan.

Ledtråd 2

Kedjeregeln ger $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 + y^2)(2x + 2yy')$. Lös ut y' . Tangenten fås sedan ur enpunktsformeln. I (b) är tangenten vågrät, $y' = 0$, där y är störst eller minst.

Ledtråd 3

$y' = \frac{x(16 - (x^2 + y^2))}{y(16 + (x^2 + y^2))}$. I (b): $x = 0$ ger bara origo, så $x^2 + y^2 = 16$; sätt in det i kurvans ekvation.

Lösning

(a) Punkten ligger på kurvan: $x_0^2 + y_0^2 = 5 + 3 = 8$ och $x_0^2 - y_0^2 = 2$, så $8^2 = 64 = 32 \cdot 2$.

Implicit derivering med avseende på x ger

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 32(2x - 2yy') \iff (x^2 + y^2)(x + yy') = 16x - 16yy'$$

Samla termerna med y' :

$$yy'(16 + (x^2 + y^2)) = x(16 - (x^2 + y^2)) \iff y' = \frac{x(16 - (x^2 + y^2))}{y(16 + (x^2 + y^2))}, \quad y \neq 0$$

I $(\sqrt{5}, \sqrt{3})$ är $x^2 + y^2 = 8$, så lutningen är

$$k = \frac{\sqrt{5}(16 - 8)}{\sqrt{3}(16 + 8)} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$$

Enpunktsformeln ger

$$y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}(x - \sqrt{5}) \iff y = \frac{\sqrt{5}x - 5 + 9}{3\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}x + 4}{3\sqrt{3}}$$

(b) Kurvan är sluten och begränsad, så y antar ett största och ett minsta värde på den. De punkter på kurvan där $y = 0$ är $x^4 = 32x^2$, dvs. $x = 0$ och $x = \pm 4\sqrt{2}$; där är $y = 0$ varken störst eller minst (kurvan har punkter med både $y > 0$ och $y < 0$, t.ex. $(\sqrt{5}, \pm\sqrt{3})$). Alltså antas extremvärdena där $y \neq 0$ och tangenten är vågrät, $y' = 0$:

$$x(16 - (x^2 + y^2)) = 0 \iff x = 0 \text{ eller } x^2 + y^2 = 16$$

Med $x = 0$ blir kurvans ekvation $y^4 = -32y^2$, dvs. $y^2(y^2 + 32) = 0$, så $y = 0$, vilket är uteslutet. Alltså är $x^2 + y^2 = 16$. Insatt i kurvans ekvation, med $x^2 = 16 - y^2$:

$$16^2 = 32(16 - 2y^2) \iff 8 = 16 - 2y^2 \iff y^2 = 4$$

Då är $x^2 = 16 - 4 = 12$, dvs. $x = \pm 2\sqrt{3}$.

$$y_{\max} = 2 \text{ i } (\pm 2\sqrt{3}, 2), \quad y_{\min} = -2 \text{ i } (\pm 2\sqrt{3}, -2)$$

Kontroll med polära koordinater: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ger $r^2 = 32 \cos 2\theta$, så $y^2 = 32 \cos 2\theta \sin^2 \theta = 32(1 - 2s)s$ med $s = \sin^2 \theta$. Det är störst för $s = \frac{1}{4}$ och ger $y^2 = 32 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 4$.

Kontrollerat mot facit.

4. Normallinjer till $y = x^4$

Låt

$$y = f(x) = x^4.$$

- (a) Låt $P = (a, f(a))$, $a \neq 0$, vara en punkt på kurvan. Finn ekvationen för normallinjen genom P . (3p)
- (b) Normallinjen ovan skär y -axeln i punkten $Q = (0, b)$. Bestäm det minsta möjliga värdet på b och ange vilken punkt P på kurvan det motsvarar. **Ledning:** Finn först ett uttryck för b i variabeln a . (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Tangent och normal via **derivatan**, och sedan en **optimering** av en funktion av en variabel.

Ledtråd 2

Normalen är vinkelrät mot tangenten, så dess lutning är $k_n = -\frac{1}{f'(a)}$. Sätt $x = 0$ i normalens ekvation för att få $b(a)$ och minimera sedan $b(a)$.

Ledtråd 3

$$b(a) = \frac{1}{4a^2} + a^4, \text{ som går mot } +\infty \text{ både då } a \rightarrow 0 \text{ och } a \rightarrow \pm\infty. \text{ Lös } b'(a) = 0.$$

 Lösning

(a) $P = (a, a^4)$ och $f'(x) = 4x^3$, så tangentens lutning är $4a^3 \neq 0$ och normalens lutning

$$k_n = -\frac{1}{4a^3}$$

Enpunktsformeln ger

$$y - a^4 = -\frac{1}{4a^3}(x - a) \iff \boxed{y = -\frac{x}{4a^3} + \frac{1}{4a^2} + a^4}$$

(b) Med $x = 0$ får vi

$$b(a) = \frac{1}{4a^2} + a^4, \quad a \neq 0$$

Funktionen är jämn, så det räcker att studera $a > 0$. Där är b deriverbar och

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} b(a) = +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} b(a) = +\infty$$

så minimum antas i en inre punkt där $b'(a) = 0$:

$$b'(a) = -\frac{1}{2a^3} + 4a^3 = 0 \iff a^6 = \frac{1}{8} \iff a^2 = \frac{1}{2} \iff a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Det är den enda kritiska punkten för $a > 0$ (och $b''(a) = \frac{3}{2a^4} + 12a^2 > 0$). Med $a^2 = \frac{1}{2}$ och $a^4 = \frac{1}{4}$:

$$b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{b_{\min} = \frac{3}{4} \text{ för } P = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $\frac{e^{x/2}}{x^2 + x - 2}$

Definiera funktionen

$$y = f(x) = \frac{e^{x/2}}{x^2 + x - 2}.$$

- (a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema för derivatan. Konvexitet behöver ej beaktas. Skissera kurvan. (4p)
- (b) Beskriv med kod/kommandon hur grafen till denna funktion skulle kunna plottas i MATLAB på ett sådant sätt att de intressanta delarna av grafen framträder. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: nämnarens nollställen, gränsvärden i $\pm\infty$ och ett **teckenschema** för derivatan.

Ledtråd 2

Faktorisera nämnaren: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Undersök ensidiga gränsvärden vid $x = 1$ och $x = -2$, samt $x \rightarrow \pm\infty$ (exponentialfunktionen dominerar potenser). Derivera med kvotregeln.

Ledtråd 3

$f'(x) = \frac{(x+1)(x-4)e^{x/2}}{2(x-1)^2(x+2)^2}$. Nämnaren är positiv där den inte är noll, så tecknet bestäms av $(x+1)(x-4)$.

Lösning

(a) Nämnaren är $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, så $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Täljaren är alltid positiv, så kurvan skär aldrig x -axeln; y -axeln skärs i $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Asymptoter. Vid $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x/2}}{x^2 + x - 2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2}}{x^2 + x - 2} = \infty$$

Det första eftersom täljaren går mot 0 och nämnaren mot ∞ ; det andra eftersom exponentialfunktionen dominerar potensfunktioner. Alltså är $y = 0$ vågrät asymptot åt vänster. Åt höger finns ingen sned asymptot, ty av samma skäl är

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2}}{x^3 + x^2 - 2x} = \infty$$

Vid nämnarens nollställen går täljaren mot $\sqrt{e}$ respektive $\frac{1}{e}$, båda positiva:

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{e^{x/2}}{(x-1)(x+2)} = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{e^{x/2}}{(x-1)(x+2)} = \mp\infty$$

(vid $x = 1$ är $x + 2 \rightarrow 3 > 0$; vid $x = -2$ är $x - 1 \rightarrow -3 < 0$). Sammanfattat:

lodräta asymptoter $x = -2$ och $x = 1$; vågrät asymptot $y = 0$ då $x \rightarrow -\infty$

Derivata. Kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}(x^2 + x - 2) - e^{x/2}(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{(x^2 - 3x - 4)e^{x/2}}{2(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x-4)e^{x/2}}{2(x-1)^2(x+2)^2}$$

Kritiska punkter $x = -1$ och $x = 4$; derivatan är odefinierad i $x = -2$ och $x = 1$.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1
$x + 1$	-	-	-	0	+	+
$x - 4$	-	-	-	-	-	-
$2(x - 1)^2(x + 2)^2$	+	0	+	+	+	0
$e^{x/2}$	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	odef.	+	0	-	od
$f(x)$	↗	asympt.	↗	lok. max	↘	as'

$$\text{lok. max } f(-1) = \frac{e^{-1/2}}{1 - 1 - 2} = -\frac{1}{2\sqrt{e}} \approx -0,303, \quad \text{lok. min } f(4) = \frac{e^2}{18} \approx 0,411$$

Globala extremvärden saknas, eftersom f är obegränsad både uppåt och nedåt.

Skiss. Från vänster startar kurvan strax under x -axeln (asymptoten $y = 0$), växer och går mot $+\infty$ vid $x = -2^-$. Mellan asymptoterna kommer den från $-\infty$, når lokalt maximum $(-1, -\frac{1}{2\sqrt{e}})$ och går mot $-\infty$ vid $x = 1^-$. Till höger om $x = 1$ kommer den från $+\infty$, sjunker till lokalt minimum $(4, \frac{e^2}{18})$ och växer sedan obegränsat.

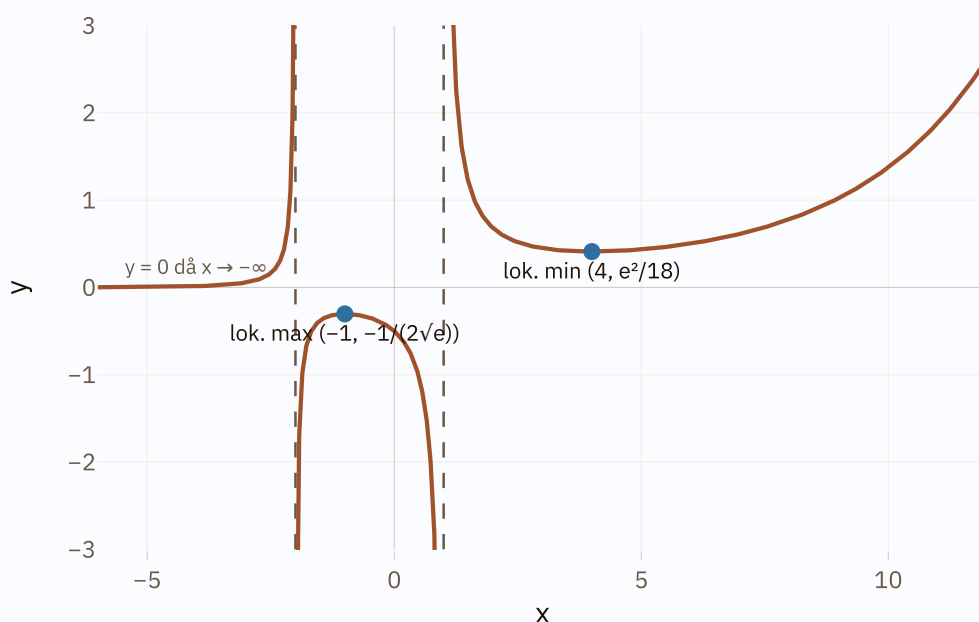
(b) Exempelvis (lärarens kod):

```

1 x = -6:0.01:12; % få med det intressanta intervallet
2 f = @(x) exp(x/2)./(x.^2+x-2); % OBS: punktvis potens och kvot
3 y = f(x);
4 plot(x,y,-1,f(-1),'r*',4,f(4),'b*',[ -2,-2],[ -3,3],'k--',[1,1],[ -3,3],'k--');
5 axis([-6,12,-3,3]) % begränsa y-led, annars dominerar asymptoterna
6 set(gca,'XAxisLocation','origin','YAxisLocation','origin')

```

Det viktiga är punktvisa operationer (`./`, `.^`), ett x-intervall som innehåller -2 , -1 , 1 och 4 , och ett begränsat y-intervall med `axis` så att extrempunkterna syns trots de lodräta asymptoterna.



Kontrollerat mot facit. Lärarens figurtext skriver $e^{x/4}$, ett skrivfel; räkningen och koden använder $e^{x/2}$.

6. Taylorpolynom för $\arctan x$ och en approximation av π

Sätt

$$f(x) = \arctan x.$$

(a) Finn tredje ordningens taylorpolynom $P_3(x)$ till $f(x)$ kring punkten 0. Lagranges restterm behöver ej beräknas. (3p)

(b) Man kan visa att

$$\pi = 4 \left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \right).$$

Använd taylorpolynomet P_3 du funnit ovan för att finna en rationell approximation av π . (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Taylor's formel för en arcusfunktion.

Ledtråd 2

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3, \text{ med } f'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \text{ Derivera två gånger till.}$$

Ledtråd 3

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ och } f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}. \text{ I (b): beräkna } P_3\left(\frac{1}{2}\right) \text{ och } P_3\left(\frac{1}{3}\right).$$

Lösning

(a) Derivatorna:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

I $x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ och $f'''(0) = -2$. Alltså

$$P_3(x) = 0 + x + 0 \cdot x^2 - \frac{2}{3!}x^3 \implies \boxed{P_3(x) = x - \frac{x^3}{3}}$$

(b) För små x är $\arctan x \approx P_3(x)$:

$$\arctan \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 8} = \frac{11}{24}, \quad \arctan \frac{1}{3} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 27} = \frac{26}{81}$$

Med gemensam nämnare $3 \cdot 8 \cdot 27 = 648$:

$$\pi \approx 4 \left(\frac{11}{24} + \frac{26}{81} \right) = 4 \cdot \frac{297 + 208}{648} = \frac{505}{162}$$

$$\pi \approx \frac{505}{162} \approx 3,117$$

Felet är ungefär 0,024.

Anmärkning: Identiteten följer av additionsformeln $\arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u+v}{1-uv}$ (för

$uv < 1$ och $u, v > 0$): $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$, och $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Talföljder och summor](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Implicit derivering](#)
- [Derivata](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Taylors formel](#)
- [Arcusfunktioner](#)