

M0047M-2023-10-26

19 okt. 2026, 13 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2023-10-26 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_231026.pdf, m0047m_231026sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: koefficienten för x^8 i $(x^2 - \frac{2}{x^3})^9$ och antalet handskakningar mellan nio personer
- Uppgift 2: tre gränsvärden: $\frac{\sin 4x}{\tan x}$, ett rotuttryck och arcustangens av en kvot i oändligheten
- Uppgift 3: alla normallinjer till $y = x^2 - 2x$ genom punkten $(1, \frac{7}{2})$
- Uppgift 4: injektivitet, värdemängd och invers för $\sqrt{3x+13} - \sqrt{3x-3}$
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkter, asymptoter och värdemängd för $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 4x + 4}$
- Uppgift 6: relaterade hastigheter, höjden hos en brandman på en stege som reses och förlängs

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Binomialsatsen och handskakningar

(a) Bestäm koefficienten för x^8 -termen i binomialutvecklingen av

$$(x^2 - \frac{2}{x^3})^9.$$

(3p)

(b) Vid ett möte deltog nio personer. Innan mötet skakade alla personer hand med varandra en gång. Hur många handskakningar utfördes totalt innan mötet? (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är binomialsatsen med **binomialkoefficienter**; (b) är en räkneuppgift som kan lösas med en **aritmetisk summa** eller en binomialkoefficient.

Ledtråd 2

(a) $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ med $a = x^2$ och $b = -\frac{2}{x^3}$. Skriv den allmänna termen som en konstant gånger en potens av x . (b) Varje handskakning är ett par av personer.

Ledtråd 3

(a) Den allmänna termen innehåller x^{18-5k} ; välj k så att exponenten blir 8. (b) Antalet par bland nio personer är $\binom{9}{2}$.

Lösning

(a) Binomialsatsen ger

$$\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (x^2)^{9-k} \left(-\frac{2}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (-2)^k x^{18-2k-3k} = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (-2)^k x^{18-5k}$$

Exponenten är 8 när $18 - 5k = 8$, dvs. $k = 2$. Den termen är

$$\binom{9}{2} (-2)^2 x^8 = \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 4 x^8 = 36 \cdot 4 x^8 = 144 x^8$$

så

koefficienten är 144

(b) Kalla personerna $p_1, p_2, \dots, p_9$. Person p_1 skakar hand med 8 personer, p_2 med 7 nya (handslaget med p_1 är redan räknat), p_3 med 6 nya och så vidare. Totalt blir det den aritmetiska summan

$$8 + 7 + \dots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^8 k = \frac{8 \cdot 9}{2} = \boxed{36}$$

Alternativt: varje handslag motsvarar ett val av två personer bland nio, vilket kan göras på $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ sätt.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 6} - 3}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \left(\frac{\sqrt{4x^8 + 9x^6} - 6x^3 \sin x}{5x^7 e^{-x} - 2x^4} \right).$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$ och ett gränsvärde i oändligheten, som löses med standardgränsvärden, förlängning med konjugat och utbrytning av den dominerande termen.

Ledtråd 2

(a) Skriv $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ och använd $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$. (b) Förläng med $\sqrt{x+6} + 3$. (c) $\arctan$ är kontinuerlig, så gränsvärdet kan flyttas in i argumentet; bryt ut x^4 i täljare och nämnare.

Ledtråd 3

(a) $\frac{\sin 4x}{\tan x} = \cos x \cdot 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{x}{\sin x}$. (b) Nämnaren blir $(x+6) - 9 = x - 3$. (c) $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ och $\frac{x^3}{e^x} \rightarrow 0$ när $x \rightarrow \infty$.

Lösning

(a) Gränsvärdet är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Med $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ och standardgränsvärdet $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$ då $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = \boxed{4}$$

(b) Också typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Förlängning med nämnarens konjugat:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x+6)-9} = \sqrt{x+6}+3, \quad x \neq 3$$

så

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \sqrt{9}+3 = \boxed{6}$$

(c) Eftersom $\arctan$ är kontinuerlig räcker det att bestämma gränsvärdet av argumentet. För $x > 0$

är $\sqrt{4x^8 + 9x^6} = x^4 \sqrt{4 + \frac{9}{x^2}}$, och x^4 dominerar i nämnaren eftersom $x^7 e^{-x} = x^4 \cdot \frac{x^3}{e^x}$.

Utbrytning av x^4 ger

$$\frac{\sqrt{4x^8 + 9x^6} - 6x^3 \sin x}{5x^7 e^{-x} - 2x^4} = \frac{\sqrt{4 + \frac{9}{x^2}} - 6 \cdot \frac{\sin x}{x}}{5 \cdot \frac{x^3}{e^x} - 2} \rightarrow \frac{2 - 6 \cdot 0}{5 \cdot 0 - 2} = -1$$

Här går $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ eftersom $|\sin x| \leq 1$, och $\frac{x^3}{e^x} \rightarrow 0$ är ett standardgränsvärde. Alltså är

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{\sqrt{4x^8 + 9x^6} - 6x^3 \sin x}{5x^7 e^{-x} - 2x^4}\right) = \arctan(-1) = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Normallinjer genom en punkt

Finn alla normallinjer till kurvan

$$y = f(x) = x^2 - 2x$$

som går genom punkten $Q = (1, \frac{7}{2})$. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Tangent och normal till en kurva, se [Derivata](#): normalen i en punkt står vinkelrätt mot tangenten där.

Ledtråd 2

Låt $P = (a, a^2 - 2a)$ vara en godtycklig punkt på kurvan. Om $f'(a) \neq 0$ har normalen lutningen $-\frac{1}{f'(a)}$; sätt in Q i normalens ekvation och lös ut a . Glöm inte fallet $f'(a) = 0$, där normalen är lodrät.

Ledtråd 3

Villkoret blir $a^2 - 2a - 3 = 0$. I $a = 1$ är tangenten vågrät, och normalen $x = 1$ går genom Q .

 Lösning

Först: $f(1) = 1 - 2 = -1 \neq \frac{7}{2}$, så Q ligger inte på kurvan. Låt $P = (a, a^2 - 2a)$ vara en punkt på kurvan. Derivatan är $f'(x) = 2x - 2$, så tangenten i P har lutningen $2a - 2$.

Fallet $a \neq 1$. Normalen har lutningen $-\frac{1}{2a-2}$ och ekvationen

$$y = -\frac{x-a}{2(a-1)} + a^2 - 2a$$

Den går genom $Q = (1, \frac{7}{2})$ om

$$\frac{7}{2} = -\frac{1-a}{2(a-1)} + a^2 - 2a = \frac{1}{2} + a^2 - 2a \iff a^2 - 2a - 3 = 0 \iff (a-1)^2 = 4$$

dvs. $a = 3$ eller $a = -1$.

- $a = 3$: $P_1 = (3, 3)$, lutning $-\frac{1}{4}$, och $y = -\frac{x-3}{4} + 3 = \frac{15-x}{4}$.
- $a = -1$: $P_2 = (-1, 3)$, lutning $\frac{1}{4}$, och $y = \frac{x+1}{4} + 3 = \frac{13+x}{4}$.

Fallet $a = 1$. Då är $f'(1) = 0$, tangenten i $P_3 = (1, -1)$ är vågrät och normalen är den lodräta linjen $x = 1$. Den går genom Q , eftersom Q har x -koordinaten 1.

Det finns alltså tre normallinjer genom Q :

$$\boxed{y = \frac{15-x}{4}, \quad y = \frac{13+x}{4}, \quad x = 1}$$

Kontroll: $\frac{15-1}{4} = \frac{13+1}{4} = \frac{7}{2}$. Linjen $x = 1$ är kurvans symmetrilinje, eftersom $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, så de två sneda normalerna är varandras spegelbilder i den.

Kontrollerat mot facit. I figuren i lärarens lösning står den andra normalen som $y = (x-13)/4$ i teckenförklaringen, men texten och uträkningen ger $y = \frac{13+x}{4}$, som är rätt (den går genom Q).

4. Injektivitet, värdemängd och invers

Låt

$$f(x) = \sqrt{3x+13} - \sqrt{3x-3}, \quad x \in [1, \infty).$$

(a) Visa att f är injektiv (dvs. ett-till-ett). (2p)

(b) Finn värdemängden $R(f)$ för f . (1p)

(c) Finn inversa funktionen f^{-1} till f . (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Funktioner och invers: en strängt monoton funktion är injektiv, och inversen fås genom att lösa $x = f(y)$ för y .

Ledtråd 2

- (a) Derivera och visa att $f'(x) < 0$ för $x > 1$. (b) Värdemängden går från $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ till $f(1)$.
 (c) Förläng med rotkonjugatet: $(\sqrt{3y+13} - \sqrt{3y-3})(\sqrt{3y+13} + \sqrt{3y-3}) = 16$.

Ledtråd 3

- (b) $f(x) = \frac{16}{\sqrt{3x+13} + \sqrt{3x-3}}$. (c) Då gäller $\sqrt{3y+13} + \sqrt{3y-3} = \frac{16}{x}$;
 subtrahera ekvationen $\sqrt{3y+13} - \sqrt{3y-3} = x$.

Lösning

(a) För $x > 1$ är

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+13}} - \frac{3}{2\sqrt{3x-3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3x-3} - \sqrt{3x+13}}{\sqrt{3x+13}\sqrt{3x-3}}$$

Förlängning med $\sqrt{3x-3} + \sqrt{3x+13}$ ger täljaren $(3x-3) - (3x+13) = -16$:

$$f'(x) = \frac{-24}{(\sqrt{3x-3} + \sqrt{3x+13})\sqrt{(3x+13)(3x-3)}} < 0$$

eftersom alla faktorer i nämnaren är positiva. f är kontinuerlig på $[1, \infty)$ och har negativ derivata på $(1, \infty)$, så f är strängt avtagande på $[1, \infty)$. En strängt avtagande funktion antar varje värde högst en gång:

f är injektiv

Alternativt: anta $f(a) = f(b)$, flytta om till $\sqrt{3a+13} + \sqrt{3b-3} = \sqrt{3b+13} + \sqrt{3a-3}$ och kvadrera två gånger; det ger $48b = 48a$, dvs. $a = b$.

(b) $f(1) = \sqrt{16} - \sqrt{0} = 4$. Med rotkonjugatet är

$$f(x) = \frac{(3x+13) - (3x-3)}{\sqrt{3x+13} + \sqrt{3x-3}} = \frac{16}{\sqrt{3x+13} + \sqrt{3x-3}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

Funktionen är kontinuerlig och strängt avtagande, antar värdet 4 i $x = 1$ och närmar sig 0 utan att nå dit (den är positiv). Alltså

$$R(f) = (0, 4]$$

(c) Inversen $y = f^{-1}(x)$ är definierad för $x \in R(f) = (0, 4]$ och uppfyller

$$x = \sqrt{3y+13} - \sqrt{3y-3}$$

Multiplikation med rotkonjugatet ger $x(\sqrt{3y+13} + \sqrt{3y-3}) = 16$, så vi har systemet

$$\begin{cases} \sqrt{3y+13} - \sqrt{3y-3} = x \\ \sqrt{3y+13} + \sqrt{3y-3} = \frac{16}{x} \end{cases}$$

Den första ekvationen subtraherad från den andra ger

$$2\sqrt{3y-3} = \frac{16}{x} - x \iff \sqrt{3y-3} = \frac{16-x^2}{2x}$$

Högerledet är ≥ 0 för $0 < x \leq 4$, så kvadrering är en ekivalens här:

$$3(y-1) = \left(\frac{16-x^2}{2x}\right)^2 \iff y = 1 + \frac{(16-x^2)^2}{12x^2} = \frac{12x^2 + 256 - 32x^2 + x^4}{12x^2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^4 - 20x^2 + 256}{12x^2}, \quad 0 < x \leq 4$$

Kontroll: $f^{-1}(4) = \frac{256 - 320 + 256}{192} = 1$, som det ska eftersom $f(1) = 4$.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 4x + 4}$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 4x + 4}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Ange funktionens värdemängd $R(f)$. Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning av en rationell funktion: asymptoter, teckenschema för derivatan och andraderivatan.

Ledtråd 2

Faktorisera: $f(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)^2}$. Nämnarens nollställe ger en lodrät asymptot, och gränsvärdet då $x \rightarrow \pm\infty$ en vågrät. Derivera med kvotregeln och förkorta med $x+2$.

Ledtråd 3

$$f'(x) = \frac{9(x-2)}{(x+2)^3} \text{ och } f''(x) = -\frac{18(x-4)}{(x+2)^4}.$$

Lösning

Nollställena. $f(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)^2}$, så kurvan skär x -axeln i $x = 1$ och $x = 4$, och y -axeln i $f(0) =$
1. Definitionsmängden är $x \neq -2$.

Asymptoter.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = 1$$

så $y = 1$ är vågrät asymptot åt båda hållen (och då finns ingen sned). När $x \rightarrow -2$ går täljaren mot $(-3)(-6) = 18 > 0$ och nämnaren $(x+2)^2 \rightarrow 0^+$ från båda sidor, så

$$\lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} f(x) = +\infty$$

asymptoter: $y = 1$ (vågrät, $x \rightarrow \pm\infty$) och $x = -2$ (lodrät)

Derivata. Med $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{(x + 2)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(2x - 5)(x + 2)^2 - (x^2 - 5x + 4) \cdot 2(x + 2)}{(x + 2)^4} = \frac{(2x^2 - x - 10) - (2x^2 - 10x + 8)}{(x + 2)^3} = \frac{9(x - 2)}{(x + 2)^3}$$

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 2$	2	$x > 2$
$9(x - 2)$	-	-	-	0	+
$(x + 2)^3$	-	0	+	+	+
$f'(x)$	+	odef.	-	0	+
$f(x)$	↗	asymptot	↘	lok. min	↗

$$\text{lok. min } f(2) = \frac{4 - 10 + 4}{16} = -\frac{1}{8}$$

Andraderivata.

$$f''(x) = \frac{9(x + 2)^3 - 9(x - 2) \cdot 3(x + 2)^2}{(x + 2)^6} = \frac{9(x + 2) - 27(x - 2)}{(x + 2)^4} = -\frac{18(x - 4)}{(x + 2)^4}$$

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 4$	4	$x > 4$
$-18(x - 4)$	+	+	+	0	-
$(x + 2)^4$	+	0	+	+	+
$f''(x)$	+	odef.	+	0	-
$f(x)$	konvex	asymptot	konvex	infl.	konkav

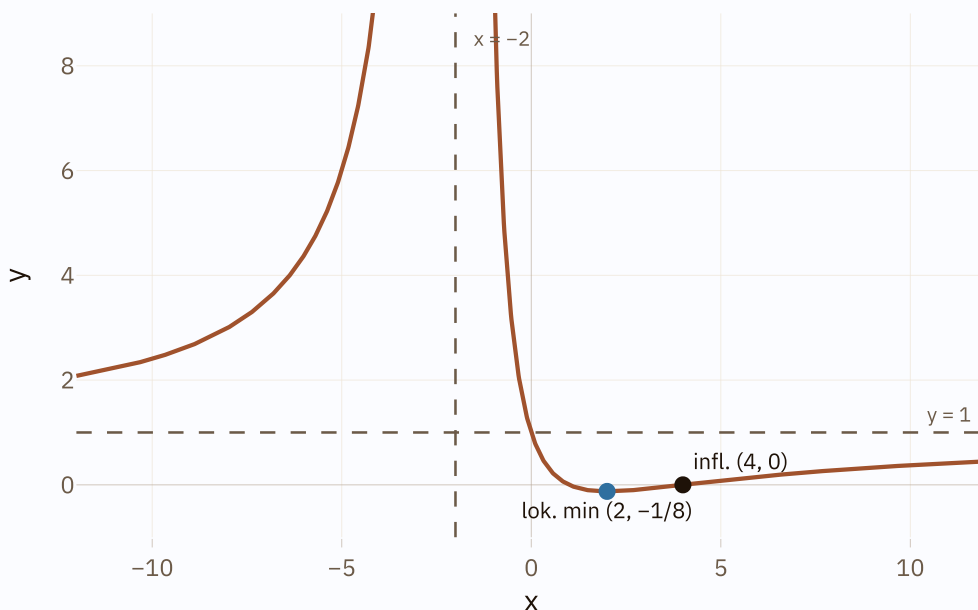
Teckenbytet i $x = 4$ ger, med $f(4) = 0$,

inflexionspunkt $(4, 0)$

Värdemängd. På $(-2, 2]$ är f kontinuerlig och avtagande från $+\infty$ (vid $x \rightarrow -2^+$) till $-\frac{1}{8}$, så alla värden i $[-\frac{1}{8}, \infty)$ antas redan där. För $x < -2$ är $f(x) - 1 = -\frac{9x}{(x + 2)^2} > 0$, och för $x > 2$ växer f från $-\frac{1}{8}$ mot 1; inga värden under $-\frac{1}{8}$ antas någonstans. Alltså är minimet globalt, det finns inget största värde och

$$R(f) = [-\frac{1}{8}, \infty)$$

Skiss. Till vänster om $x = -2$ växer kurvan från asymptoten $y = 1$ (ovanför den) upp mot $+\infty$. Till höger om $x = -2$ faller den från $+\infty$, skär y -axeln i 1 och x -axeln i 1, når minimet $(2, -\frac{1}{8})$, stiger genom inflexionspunkten $(4, 0)$ och närmar sig $y = 1$ underifrån.



Kontrollerat mot facit.

6. Brandmannen på stegen

Nederdelen av en steg på en brandbil är fäst på ovansidan av bilen på en höjd 3 meter över marken. Stegen reses genom att öka vinkeln θ samtidigt som man förlänger stegens längd från 6 m med l , se nedanstående figur.

Figuren i tentan: stegen är fäst i punkten O på brandbilens tak och bildar vinkeln θ med horisontalplanet. Den fasta delen är 6 m lång och den utskjutna delen l ; brandmannen sitter i stegens ände A .

Längst ut på stegen sitter en brandman. Hur fort ökar brandmannens höjd y över marken vid den tidpunkt när stegen förlängts med $l = 2$ m och längden ökar med en hastighet av $\frac{1}{5}$ m/s samtidigt som vinkeln är $\theta = \frac{\pi}{6}$ och ökar med vinkelhastigheten

$$\omega = \frac{1}{14} \text{ rad/s?}$$

(5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Relaterade hastigheter: ställ upp ett samband och derivera med avseende på tiden med **produkt- och kedjeregeln** (jämför **Implicit derivering**).

Ledtråd 2

Stegen har längden $6 + l$ och lutar vinkeln θ , så brandmannen är $(6 + l) \sin \theta$ över fästpunkten: $y = 3 + (6 + l) \sin \theta$, där både l och θ beror av t .

Ledtråd 3

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dl}{dt} \sin \theta + (6 + l) \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}. \text{ Sätt in } l = 2, \frac{dl}{dt} = \frac{1}{5}, \theta = \frac{\pi}{6} \text{ och } \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{14}.$$

Lösning

Brandmannens höjd över marken är

$$y(t) = 3 + (6 + l(t)) \sin \theta(t)$$

Derivering med produkt- och kedjeregeln:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dl}{dt} \sin \theta + (6 + l) \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Vid tidpunkten t_0 är $l = 2$ m, $\frac{dl}{dt} = \frac{1}{5}$ m/s, $\theta = \frac{\pi}{6}$ och $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{1}{14}$ rad/s. Med $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ och $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{14} = \boxed{\frac{1}{10} + \frac{2\sqrt{3}}{7} \approx 0,59 \text{ m/s}}$$

Uppskattning utan räknare: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)^2 = \frac{12}{49} \approx \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$, så $\frac{2\sqrt{3}}{7} \approx \frac{1}{2}$ och $\frac{dy}{dt} \approx 0,6 \text{ m/s}$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Binomialkoefficient](#)
- [Talföljder och summor](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Derivata](#)
- [Deriveringsregler](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Andraderivata och konvexitet](#)
- [Implicit derivering](#)