

M0047M-2023-08-16

19 okt. 2026, 13 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2023-08-16 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_230816.pdf, m0047m_230816sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: aritmetisk summa, husnumren på Pells gata och Ramanujans hus
- Uppgift 2: tre gränsvärden av typen $\frac{0}{0}$ utan l'Hôpital: trigonometriskt, med rotuttryck och med exponentialfunktioner
- Uppgift 3: bestäm k så att $e^{x/4}$ och $k\sqrt{x}$ tangerar varandra, och den gemensamma tangenten
- Uppgift 4: inverterbarhet och invers till $\sqrt{x^2 + 6x}$, samt g ur $g(f(x)) = (x + 3)^2$
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter för $(x^2 - 5x + 4)e^{x/2}$
- Uppgift 6: maximal area av triangeln mellan koordinataxlarna och en tangent till $1 - \ln x$

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Husnumren på Pells gata

Husen längs Pells gata är numrerade i ordning 1, 2, 3, ... ända upp till 49.

(a) Vad är summan av alla husnumren på Pells gata? (2p)

(b) Ramanujan bor längs denna gata i hus nummer m . En dag observerar han att summan av numren på husen till vänster om hans hus är samma som summan av numren på husen till höger om hans hus. Vad är m ? (3p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1

En aritmetisk summa.

 Ledtråd 2

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. I (b) är summan till vänster om hus m lika med $1 + 2 + \dots + (m-1)$.

 Ledtråd 3

Hela summan är vänstersumman plus m plus högersumman, och de två sidosummorna är lika: $S_{49} = 2 \cdot \frac{(m-1)m}{2} + m$.

 Lösning**(a)** Summan av de n första positiva heltalen är den aritmetiska summan

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

så

$$S_{49} = \frac{49 \cdot 50}{2} = 49 \cdot 25 = 7^2 \cdot 5^2 = 35^2 = \boxed{1225}$$

(b) Numrera husen $1, 2, \dots, 49$ från vänster till höger. Summan av husnumren till vänster om hus m är

$$S_{m-1} = 1 + 2 + \dots + (m-1) = \frac{(m-1)m}{2}$$

och enligt villkoret är summan till höger lika stor. Hela summan är därför

$$S_{49} = \underbrace{S_{m-1}}_{\text{hus } 1, \dots, m-1} + \underbrace{m}_{\text{hus } m} + \underbrace{S_{m-1}}_{\text{hus } m+1, \dots, 49} = 2 \cdot \frac{(m-1)m}{2} + m = m^2 - m + m = m^2$$

Med (a) blir $m^2 = 35^2$, och eftersom $m > 0$:

$$m = 35$$

Kontroll: $1 + \dots + 34 = \frac{34 \cdot 35}{2} = 595$ och $36 + \dots + 49 = 1225 - 595 - 35 = 595$.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden av typen 0/0

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{\sqrt{4+x} - 2}$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{4^x - 2^x}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Alla tre är **Gränsvärden** av typen $\frac{0}{0}$ som ska hyfsas algebraiskt eller föras tillbaka på standardgränsvärden.

Ledtråd 2

(a) Dela täljare och nämnare med x^2 och använd $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$. (b) Förläng med rotkonjugaten till både täljaren och nämnaren. (c) Skriv $4^x = (2^x)^2$ och faktorisera.

Ledtråd 3

(b) $(\sqrt{1+4x}-1)(\sqrt{1+4x}+1) = 4x$ och $(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2) = x$. (c) $4^x - 1 = (2^x - 1)(2^x + 1)$ och $4^x - 2^x = 2^x(2^x - 1)$.

Lösning

(a) Dela täljare och nämnare med x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\frac{\sin x^2}{x^2}} = \frac{1^2}{1} = \boxed{1}$$

där båda kvoterna går mot 1 enligt standardgränsvärdet $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$ då $t \rightarrow 0$ (med $t = x$ respektive $t = x^2$).

(b) Förläng med båda rotkonjugaten:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{4+x}-2} &= \frac{(\sqrt{1+4x}-1)(\sqrt{1+4x}+1)(\sqrt{4+x}+2)}{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)(\sqrt{1+4x}+1)} \\ &= \frac{4x(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{1+4x}+1)} = 4 \cdot \frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{1+4x}+1}, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

Det sista uttrycket är kontinuerligt i $x = 0$, så

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{4+x}-2} = 4 \cdot \frac{2+2}{1+1} = \boxed{8}$$

(c) Med $4^x = (2^x)^2$ blir

$$\frac{4^x - 1}{4^x - 2^x} = \frac{(2^x - 1)(2^x + 1)}{2^x(2^x - 1)} = \frac{2^x + 1}{2^x}, \quad x \neq 0$$

så

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{4^x - 2^x} = \frac{1+1}{1} = \boxed{2}$$

Kontrollerat mot facit.

3. När tangerar $e^{x/4}$ och $k\sqrt{x}$ varandra?

Låt $x > 0$ och definiera

$$f(x) = e^{x/4}, \quad g(x) = k\sqrt{x}.$$

- (a) Finn det $k > 0$ som gör att funktionerna f och g tangerar varandra i en punkt. (4p)
- (b) Bestäm funktionernas gemensamma tangent för detta värde på k . (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Två kurvor tangerar varandra i $x = a$ om de har samma funktionsvärde och samma **derivata** där, dvs. samma tangent.

Ledtråd 2

Ställ upp ekvationssystemet $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ med de två obekanta a och k . Tangenten fås sedan med enpunktsformeln.

Ledtråd 3

$f'(a) = \frac{e^{a/4}}{4}$ och $g'(a) = \frac{k}{2\sqrt{a}}$. Ersätt $e^{a/4}$ i den första ekvationen med $\frac{4k}{2\sqrt{a}}$ från den andra; det ger $k(a-2) = 0$.

Lösning

(a) Derivatorna är

$$f'(x) = \frac{e^{x/4}}{4}, \quad g'(x) = \frac{k}{2\sqrt{x}}$$

Kurvorna tangerar varandra i $x = a$ om

$$\begin{cases} e^{a/4} = k\sqrt{a}, \\ \frac{e^{a/4}}{4} = \frac{k}{2\sqrt{a}}. \end{cases}$$

Den andra ekvationen ger $e^{a/4} = \frac{2k}{\sqrt{a}}$. Insatt i den första:

$$k\sqrt{a} = \frac{2k}{\sqrt{a}} \iff ka = 2k \iff k(a - 2) = 0$$

Eftersom $k > 0$ är $a = 2$. Den första ekvationen ger då

$$e^{2/4} = k\sqrt{2} \iff \sqrt{e} = k\sqrt{2} \iff \boxed{k = \sqrt{\frac{e}{2}}}$$

och tangeringspunkten är $(2, \sqrt{e})$.

Varför bara ett k ? f är växande och konvex ($f'' = \frac{e^{x/4}}{16} > 0$) medan g är växande och konkav ($g'' = -\frac{k}{4x^{3/2}} < 0$). För mindre k ligger g hela tiden under f , och för större k skär kurvorna varandra i två punkter med olika tangenter. Ekvivalent: $k\sqrt{x} = e^{x/4} \iff k = \frac{e^{x/4}}{\sqrt{x}}$, och högerledet har sitt minsta värde $\sqrt{e/2}$ just i $x = 2$.

(b) Tangenten genom $(2, \sqrt{e})$ har lutningen $f'(2) = \frac{\sqrt{e}}{4}$. Enpunktsformeln ger

$$y - \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{4}(x - 2) \iff \boxed{y = \frac{\sqrt{e}}{4}(x + 2)}$$

Kontrollerat mot facit.

4. Inversen till $\sqrt{x^2 + 6x}$

Definiera

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$$

för $x > 0$.

- (a) Visa att f är inverterbar. (1p)
- (b) Finn inversen f^{-1} till f . (3p)
- (c) Bestäm funktionen g om

$$g(f(x)) = (x + 3)^2.$$

(1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Funktioner och invers: en strängt växande funktion är injektiv och alltså inverterbar.

Ledtråd 2

(a) Visa att $f' > 0$. (b) Bestäm värdemängden (den blir inversens definitionsmängd) och lös $x = f(y)$ för y . (c) Skriv $(x + 3)^2$ med hjälp av $f(x)$.

Ledtråd 3

Kvadratkomplettera: $y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$. Välj det tecken framför roten som ger $y > 0$. I (c) är $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Lösning

(a) För $x > 0$ är

$$f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x}} > 0$$

så f är strängt växande på $(0, \infty)$, alltså injektiv (1-1) och därmed inverterbar. ■

Alternativt: om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1^2 + 6x_1 = x_2^2 + 6x_2$, dvs. $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 6) = 0$. Eftersom $x_1 + x_2 + 6 > 6$ följer $x_1 = x_2$.

(b) f är kontinuerlig och strängt växande med

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{1 + \frac{6}{x}} = \infty$$

så $R_f = (0, \infty)$, och det är definitionsmängden för f^{-1} . Sätt $y = f^{-1}(x)$, dvs. $x = f(y)$ med $x, y > 0$:

$$x = \sqrt{y^2 + 6y} \implies x^2 = y^2 + 6y \iff x^2 + 9 = (y + 3)^2 \iff y = -3 \pm \sqrt{x^2 + 9}$$

Minustecknet ger $y < 0$, men f^{-1} ska anta värden i $D_f = (0, \infty)$. Alltså

$$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 9} - 3, \quad x > 0}$$

Kontroll: $f(\sqrt{x^2 + 9} - 3) = \sqrt{(y + 3)^2 - 9} = \sqrt{x^2 + 9 - 9} = x$ för $x > 0$.

(c) Eftersom

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 = (\sqrt{x^2 + 6x})^2 + 9 = f(x)^2 + 9$$

är $g(f(x)) = f(x)^2 + 9$, så

$$\boxed{g(x) = x^2 + 9}$$

(på $R_f = (0, \infty)$). Samma svar fås med $t = f(x) \iff x = f^{-1}(t): g(t) = (f^{-1}(t) + 3)^2 = (\sqrt{t^2 + 9})^2 = t^2 + 9$.

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning skriver i (a) nämnaren som $\sqrt{x^2 + 2x}$, ett tryckfel för $\sqrt{x^2 + 6x}$; slutsatsen $f' > 0$ påverkas inte.

5. Kurvan $(x^2 - 5x + 4)e^{x/2}$

Definiera funktionen

$$y = f(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{x/2}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: gränsvärden i $\pm\infty$, teckenschema för derivatan och andraderivatan för inflexionspunkter.

Ledtråd 2

Använd att exponentialfunktionen dominerar potensfunktioner: $x^n e^{x/2} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow -\infty$.
Undersök $f(x)/x$ då $x \rightarrow \infty$. Derivera med produktregeln och bryt ut $e^{x/2}$.

Ledtråd 3

$$f'(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{2} e^{x/2} \text{ och } f''(x) = \frac{x^2 + 3x - 8}{4} e^{x/2}.$$

Lösning

Nollställen. $f(x) = (x-1)(x-4)e^{x/2}$, så kurvan skär x-axeln i $x = 1$ och $x = 4$, och y-axeln i $f(0) = 4$.

Asymptoter. f är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så det finns inga lodräta asymptoter.
Eftersom en exponentialfunktion dominerar en potensfunktion är

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{x/2} - 5x e^{x/2} + 4e^{x/2}) = 0 - 0 + 0 = 0$$

så $y = 0$ är vågrät asymptot då $x \rightarrow -\infty$. Åt höger är

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - 5 + \frac{4}{x}\right) e^{x/2} = \infty$$

så där finns ingen sned asymptot.

enda asymptoten är $y = 0$ då $x \rightarrow -\infty$

Derivata.

$$f'(x) = (2x-5)e^{x/2} + (x^2-5x+4) \frac{e^{x/2}}{2} = \frac{x^2-x-6}{2} e^{x/2} = \frac{(x+2)(x-3)}{2} e^{x/2}$$

Kritiska punkter: $x = -2$ och $x = 3$.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 3$	3	$x > 3$
$x+2$	-	0	+	+	+

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 3$	3	$x > 3$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{e^{x/2}}{2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

$$f(-2) = (4 + 10 + 4)e^{-1} = \frac{18}{e}, \quad f(3) = (9 - 15 + 4)e^{3/2} = -2e^{3/2}$$

$$\text{lok. max } f(-2) = \frac{18}{e} \approx 6,62, \quad \text{lok. min } f(3) = -2e^{3/2} \approx -8,96$$

Minimet är också globalt (för $x < -2$ är $f' > 0$ och $f \rightarrow 0$), men globalt maximum saknas.

Andraderivata.

$$f''(x) = \frac{2x-1}{2}e^{x/2} + \frac{x^2-x-6}{2} \cdot \frac{e^{x/2}}{2} = \frac{x^2+3x-8}{4}e^{x/2}$$

Nollställena är

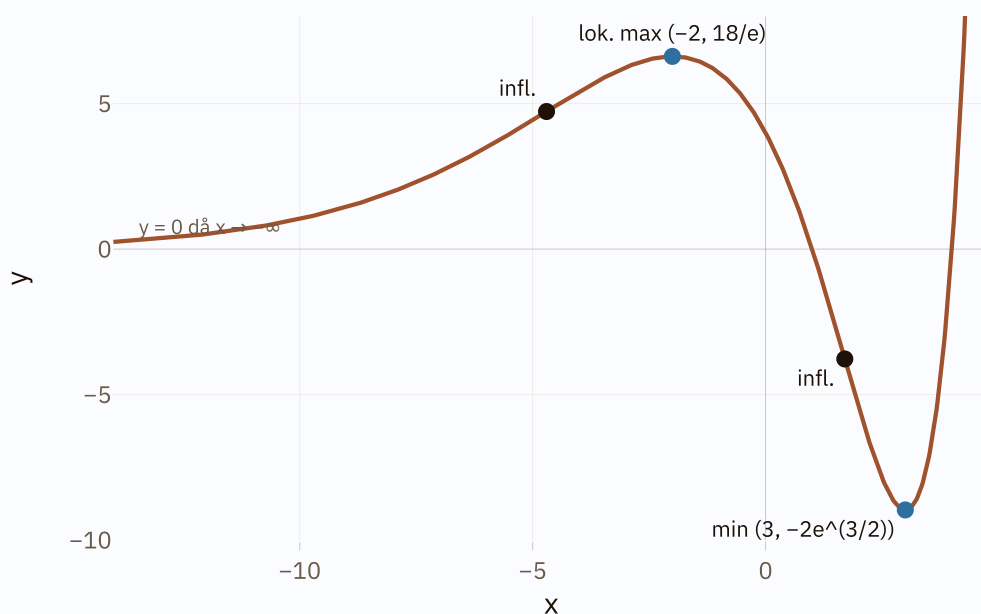
$$r_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 8} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}, \quad r_1 \approx -4,70, \quad r_2 \approx 1,70$$

Båda är enkla nollställan, så f'' byter tecken: $f'' > 0$ (konvex) för $x < r_1$ och $x > r_2$, $f'' < 0$ (konkav) för $r_1 < x < r_2$. Eftersom $x^2 = 8 - 3x$ i dessa punkter är $f(r) = (12 - 8r)e^{r/2}$, så

$$\text{inflexionspunkter i } x = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}, \quad f(r_1) \approx 4,73, \quad f(r_2) \approx -3,78$$

($5 < \sqrt{41} < 7$ ger $-5 < r_1 < -4$ och $1 < r_2 < 2$.)

Skiss. Kurvan kommer in längs x -axeln från vänster (ovanför den), är konvex fram till inflexionspunkten vid $x \approx -4,7$, når maximum $(-2, 18/e)$, sjunker genom $(0, 4)$ och nollstället $x = 1$, passerar inflexionspunkten vid $x \approx 1,7$, når minimum $(3, -2e^{3/2})$ och växer sedan snabbt genom $x = 4$ mot ∞ .



Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning anger inte inflexionspunkternas y -värden; de är tillagda här.

6. Största triangeln under en tangent till $1 - \ln x$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = 1 - \ln x, \quad 0 < x \leq e.$$

(a) Låt $P = (a, f(a))$ vara en punkt på kurvan ovan. Ställ upp ett uttryck för arean A av triangeln som begränsas av koordinataxlarna och tangenten till kurvan f genom punkten P . (2p)

(I tentan visas en figur med kurvan $y = 1 - \ln x$, punkten P och tangenten genom P , som tillsammans med koordinataxlarna begränsar triangeln A .)

(b) Finn det värde $a \in (0, e]$ för vilket arean av triangeln ovan är maximal. (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett **optimeringsproblem** på ett halvöppet intervall; först behövs tangentens ekvation (**Derivata**).

Ledtråd 2

Tangenten är $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Triangelns kateter är tangentens skärningar med axlarna. Jämför sedan A i kritiska punkter med värdet i $a = e$ och gränsvärdet då $a \rightarrow 0^+$.

Ledtråd 3

Tangenten blir $y = 2 - \ln a - \frac{x}{a}$ och $A(a) = \frac{a(2 - \ln a)^2}{2}$, med $A'(a) = -\frac{(2 - \ln a) \ln a}{2}$.

Lösning

(a) $f'(x) = -\frac{1}{x}$, så tangenten i $(a, 1 - \ln a)$ har lutningen $-\frac{1}{a}$:

$$y - (1 - \ln a) = -\frac{1}{a}(x - a) \iff y = 2 - \ln a - \frac{x}{a}$$

Den skär y -axeln ($x = 0$) i $y_0 = 2 - \ln a$ och x -axeln ($y = 0$) i $x_0 = a(2 - \ln a)$. Båda är positiva för $0 < a \leq e$. Triangeln är rätvinklig med kateterna x_0 och y_0 :

$$A(a) = \frac{x_0 y_0}{2} = \frac{a(2 - \ln a)^2}{2}$$

(b) Derivera:

$$A'(a) = \frac{1}{2}(2 - \ln a)^2 + \frac{a}{2} \cdot 2(2 - \ln a) \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{2 - \ln a}{2}(2 - \ln a - 2) = -\frac{(2 - \ln a) \ln a}{2}$$

$A' = 0$ för $\ln a = 0$ eller $\ln a = 2$, dvs. $a = 1$ eller $a = e^2$; bara $a = 1$ ligger i $(0, e]$. På intervallet är $2 - \ln a > 0$, så

	$0 < a < 1$	1	$1 < a \leq e$
$-\ln a$	+	0	–
$2 - \ln a$	+	+	+
$A'(a)$	+	0	–
$A(a)$	↗	max	↘

Jämför med intervallets ändar:

$$A(1) = \frac{1 \cdot 2^2}{2} = 2, \quad A(e) = \frac{e(2-1)^2}{2} = \frac{e}{2} < 2, \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} A(a) = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} (4a - 4a \ln a + (a-1)^2)$$

där $a \ln a \rightarrow 0$ och $\sqrt{a} \ln a \rightarrow 0$ är standardgränsvärden. Arealen är alltså störst för

$$a = 1, \quad A_{\max} = 2$$

$$(\text{Även } A''(a) = -\frac{1 - \ln a}{a} \text{ ger } A''(1) = -1 < 0.)$$

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Talföljder och summor](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Derivata](#)
- [Deriveringsregler](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Andraderivata och konvexitet](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)