

M0047M-2023-05-25

19 okt. 2026, 14 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2023-05-25 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_230525gen.pdf, m0047m_230525sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för en sluten formel för den rekursiva talföljden $a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}$ och följdens gränsvärde
- Uppgift 2: tre gränsvärden: $\ln \sin x - \ln x$, $\frac{e^{4x} - 1}{e^x - 1}$ och en rationell funktion av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$
- Uppgift 3: tangenten till Descartes folium $2(x^3 + y^3) = 9xy$ i punkten $(1, 2)$
- Uppgift 4: gemensamma tangenter till kurvorna $y = x^2$ och $y = x^4$
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter för $x^4 - \frac{28}{3}x^3 + 20x^2$
- Uppgift 6: optimering, den kortaste stegen över en mur

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. En rekursiv talföljd och induktion

Låt

$$f(x) = \frac{3x + 2}{x + 2}, \quad x > -1.$$

Definiera talföljden $\{a_n\}$ rekursivt genom

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = f(a_n) = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}. \end{cases}$$

(a) Visa med induktion att

$$a_n = \frac{4 \cdot 4^n - 1}{2 \cdot 4^n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(4p)

(b) **(M0047M)** Man kan visa (behövs ej) att talföljden $\{a_n\}$ konvergerar mot ett gränsvärde a när $n \rightarrow \infty$. Ge förslag på MATLAB-kod/kommandon som kan visa vad detta gränsvärde är. (1p)

(b) **(M0029M/M0057M)** Man kan visa (behövs ej) att talföljden $\{a_n\}$ konvergerar mot ett gränsvärde a när $n \rightarrow \infty$. Bestäm a . (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett bevis med **induktion** för en rekursivt definierad **talföljd**, och sedan ett gränsvärde av en talföljd.

Ledtråd 2

Basfallet är $n = 0$. Anta att formeln gäller för $n = p$, sätt in den i $a_{p+1} = \frac{3a_p + 2}{a_p + 2}$ och visa att resultatet är formeln med $p + 1$ i stället för p .

Ledtråd 3

Förläng bråket med $2 \cdot 4^p + 1$. Täljaren blir $16 \cdot 4^p - 1$ och nämnaren $8 \cdot 4^p + 1$, och $16 \cdot 4^p = 4 \cdot 4^{p+1}$. För gränsvärdet: dela täljare och nämnare med 4^n .

Lösning

(a) Basfall. För $n = 0$ ger formeln

$$\frac{4 \cdot 4^0 - 1}{2 \cdot 4^0 + 1} = \frac{4 - 1}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1 = a_0$$

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något $n = p \geq 0$, dvs. att

$$a_p = \frac{4 \cdot 4^p - 1}{2 \cdot 4^p + 1} \quad (\text{induktionsantagandet})$$

Då är $a_p > 0$, så $a_p + 2 \neq 0$. Insättning i rekursionen och förlängning med $2 \cdot 4^p + 1$ ger

$$\begin{aligned} a_{p+1} &= \frac{3a_p + 2}{a_p + 2} = \frac{3 \cdot \frac{4 \cdot 4^p - 1}{2 \cdot 4^p + 1} + 2}{\frac{4 \cdot 4^p - 1}{2 \cdot 4^p + 1} + 2} = \frac{3(4 \cdot 4^p - 1) + 2(2 \cdot 4^p + 1)}{(4 \cdot 4^p - 1) + 2(2 \cdot 4^p + 1)} \\ &= \frac{12 \cdot 4^p - 3 + 4 \cdot 4^p + 2}{4 \cdot 4^p - 1 + 4 \cdot 4^p + 2} = \frac{16 \cdot 4^p - 1}{8 \cdot 4^p + 1} = \frac{4 \cdot 4^{p+1} - 1}{2 \cdot 4^{p+1} + 1} \end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller

$$a_n = \frac{4 \cdot 4^n - 1}{2 \cdot 4^n + 1} \text{ för alla } n = 0, 1, 2, \dots$$

(Kontroll: rekursionen ger $a_1 = \frac{5}{3}$, $a_2 = \frac{21}{11}$, $a_3 = \frac{85}{43}$, och formeln ger samma värden.)

(b) (M0047M) Exempelvis beräknas och plottas följdens första termer med formeln från (a):

```
1 nmax = 10;
2 n = 0:nmax;
3 an = (4*4.^n - 1)./(2*4.^n + 1); % OBS: punktvisa operationer
4 plot(n, an, 'x') % termerna planar ut mot gränsvärdet
5 an(end) % skriver ut 2.0000
```

Man ser att termerna närmar sig $a = 2$. (Lärarens kod ritar dessutom ut den vågräta linjen $y = a_{10}$ och skriver värdet i en legend.)

(b) (M0029M/M0057M) Dela täljare och nämnare med 4^n ; eftersom $\frac{1}{4^n} \rightarrow 0$ blir

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 4^n - 1}{2 \cdot 4^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{4^n}}{2 + \frac{1}{4^n}} = \frac{4}{2} = 2$$

Alternativt: f är kontinuerlig, så gränsvärdet uppfyller $a = \frac{3a+2}{a+2}$, dvs. $a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2) = 0$. Alla $a_n > 0$, så $a = 2$.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avge huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln \sin x - \ln x).$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{e^x - 1}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8x + 8}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden med standardgränsvärden, logaritm- och potenslagar och faktorisering.

Ledtråd 2

(a) Slå ihop logaritmerna och använd att $\ln$ är kontinuerlig. (b) Skriv $e^{4x} = (e^x)^4$ och faktorisera med konjugatregeln. (c) $x = 2$ är nollställe till både täljare och nämnare, så båda innehåller faktorn $x - 2$ (faktorsatsen).

Ledtråd 3

(a) $\ln \sin x - \ln x = \ln \frac{\sin x}{x}$. (b) $(e^x)^4 - 1 = (e^{2x} + 1)(e^x + 1)(e^x - 1)$. (c) $x^3 - 8x + 8 = (x - 2)(x^2 + 2x - 4)$ och $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - 2)(x^2 + 4)$.

Lösning

(a) För små $x > 0$ är $\sin x > 0$, så logaritmlagen ger $\ln \sin x - \ln x = \ln \frac{\sin x}{x}$. Eftersom $\ln$ är kontinuerlig och $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ (standardgränsvärde):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln \sin x - \ln x) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \right) = \ln 1 = \boxed{0}$$

(b) Gränsvärdet är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Med $e^{4x} = (e^x)^4$ och konjugatregeln två gånger:

$$\frac{e^{4x} - 1}{e^x - 1} = \frac{((e^x)^2 + 1)((e^x)^2 - 1)}{e^x - 1} = \frac{(e^{2x} + 1)(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x - 1} = (e^{2x} + 1)(e^x + 1)$$

för $x \neq 0$. Alltså

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{e^x - 1} = (1 + 1)(1 + 1) = \boxed{4}$$

Alternativt: geometrisk summa, $\frac{(e^x)^4 - 1}{e^x - 1} = 1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} \rightarrow 4$.

(c) Både täljare och nämnare är 0 i $x = 2$ ($8 - 16 + 8 = 0$ och $8 - 8 + 8 - 8 = 0$). Polynomdivision ger täljaren

$$x^3 - 8x + 8 = (x - 2)(x^2 + 2x - 4)$$

och nämnaren faktoriseras genom gruppering:

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = x^2(x - 2) + 4(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 4)$$

Efter förkortning med $x - 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + 4} = \frac{4 + 4 - 4}{4 + 4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Tangent till Descartes folium

Bestäm tangenten till *Descartes folium*

$$2(x^3 + y^3) = 9xy$$

i punkten $(1, 2)$. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En tangent till en kurva som ges av en ekvation i x och y : **Implicit derivering**.

Ledtråd 2

Kontrollera att punkten ligger på kurvan. Betrakta $y = y(x)$ och derivera båda leden med avseende på x (kedjeregeln för y^3 , produktregeln för xy). Lös ut y' och använd enpunktsformeln.

Ledtråd 3

Deriveringen ger $6x^2 + 6y^2y' = 9y + 9xy'$, alltså $y' = \frac{3y - 2x^2}{2y^2 - 3x}$.

Lösning

Punkten ligger på kurvan: $2(1^3 + 2^3) = 18 = 9 \cdot 1 \cdot 2$.

Låt $y = y(x)$ och derivera implicit med avseende på x :

$$\frac{d}{dx}(2(x^3 + y^3)) = \frac{d}{dx}(9xy) \iff 6x^2 + 6y^2y' = 9y + 9xy'$$

Samla y' :

$$y'(6y^2 - 9x) = 9y - 6x^2 \iff y' = \frac{3y - 2x^2}{2y^2 - 3x}$$

I punkten $(1, 2)$ är lutningen

$$k = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 1^2}{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1} = \frac{6 - 2}{8 - 3} = \frac{4}{5}$$

Enpunktsformeln ger

$$y - 2 = \frac{4}{5}(x - 1) \iff 5y - 10 = 4x - 4$$

$$\boxed{y = \frac{4x + 6}{5}} \quad (\text{dvs. } 5y - 4x = 6)$$

Kontrollerat mot facit.

4. Gemensamma tangenter till x^2 och x^4

Kurvorna

$$y = f(x) = x^2,$$

$$y = g(x) = x^4,$$

har en uppsättning tangentlinjer som är gemensamma för bägge kurvorna. Finn samtliga sådana tangentlinjer.

(I tentan visas en figur med de två kurvorna $y = x^2$ och $y = x^4$ för $-1,5 \leq x \leq 1,5$; de skär varandra i $x = -1, 0$ och 1 .)

Ledning: antag att $y = f(x)$ tangeras i punkten $(a, f(a))$ och att $y = g(x)$ tangeras i $(b, g(b))$ av den gemensamma tangenten. Vilka samband måste då gälla mellan a och b ? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Tangentens ekvation via **derivatan**: två räta linjer är samma linje om de har samma lutning och samma m -värde.

Ledtråd 2

Tangenten till $y = x^2$ i $x = a$ är $y = 2ax - a^2$, och tangenten till $y = x^4$ i $x = b$ är $y = 4b^3x - 3b^4$. Jämför koefficienterna.

Ledtråd 3

Systemet $2a = 4b^3$, $a^2 = 3b^4$. Sätt in $a = 2b^3$ i den andra ekvationen: $b^4(4b^2 - 3) = 0$.

Lösning

Tangenten till $y = x^2$ i punkten (a, a^2) är

$$y - a^2 = 2a(x - a) \iff y = 2ax - a^2$$

och tangenten till $y = x^4$ i punkten (b, b^4) är

$$y - b^4 = 4b^3(x - b) \iff y = 4b^3x - 3b^4$$

Två icke-lodräta linjer $y = k_1x + m_1$ och $y = k_2x + m_2$ är samma linje om och endast om $k_1 = k_2$ och $m_1 = m_2$:

$$\begin{cases} 2a = 4b^3, \\ a^2 = 3b^4. \end{cases}$$

Första ekvationen ger $a = 2b^3$, alltså $a^2 = 4b^6$. Insatt i den andra:

$$4b^6 - 3b^4 = b^4(4b^2 - 3) = 0 \iff b = 0 \text{ eller } b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $b = 0$ ger $a = 0$ och tangenten $y = 0$ genom origo.
- $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ger $a = 2b^3 = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ och $a^2 = \frac{27}{16}$. Tangentpunkterna är $(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{27}{16})$ på $y = x^2$ och $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{16})$ på $y = x^4$.
- $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ger symmetriskt $a = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $a^2 = \frac{27}{16}$.

De gemensamma tangenterna är alltså

$$\boxed{y = 0, \quad y = \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{27}{16}, \quad y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{27}{16}}$$

Kontroll: $4b^3 = 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2a$ och $3b^4 = 3 \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{16} = a^2$.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $x^4 - \frac{28}{3}x^3 + 20x^2$

Definiera funktionen

$$y = f(x) = x^4 - \frac{28}{3}x^3 + 20x^2.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning av ett polynom: teckenschema för derivatan och andraderivatan för inflexionspunkter.

Ledtråd 2

Ett polynom är definierat och kontinuerligt på hela $\mathbb{R}$, så lodräta asymptoter finns inte.

Undersök $\frac{f(x)}{x}$ när $x \rightarrow \pm\infty$ för sneda asymptoter. Faktorisera f' och lös $f''(x) = 0$.

Ledtråd 3

$$f'(x) = 4x(x-2)(x-5) \text{ och } f''(x) = 12x^2 - 56x + 40, \text{ med nollställena } x = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{3}.$$

Lösning

Nollställen och asymptoter. $f(x) = x^2(x^2 - \frac{28}{3}x + 20) = \frac{1}{3}x^2(x-6)(3x-10)$, så kurvan skär x -axeln i $x = 0$, $x = \frac{10}{3}$ och $x = 6$. f är ett polynom, definierat på hela $\mathbb{R}$, så det finns inga lodräta asymptoter. Vidare är

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 \left(1 - \frac{28}{3x} + \frac{20}{x^2}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{28}{3x} + \frac{20}{x^2}\right) = \pm\infty$$

så det finns varken vågräta eller sneda asymptoter:

kurvan saknar asymptoter

Derivata.

$$f'(x) = 4x^3 - 28x^2 + 40x = 4x(x^2 - 7x + 10) = 4x(x - 2)(x - 5)$$

Kritiska punkter: $x = 0$, $x = 2$ och $x = 5$.

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < 5$	5
$4x$	–	0	+	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	0	+	+
$x - 5$	–	–	–	–	–	0
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0
$f(x)$	↘	lok. min	↗	lok. max	↘	lok.

Funktionsvärdena är

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 16 - \frac{224}{3} + 80 = \frac{64}{3}, \quad f(5) = 625 - \frac{3500}{3} + 500 = -\frac{125}{3}$$

$$\text{lok. min } f(0) = 0 \text{ och } f(5) = -\frac{125}{3}, \quad \text{lok. max } f(2) = \frac{64}{3}$$

Minimet $-\frac{125}{3}$ är också globalt; globalt maximum saknas.

Andraderivata.

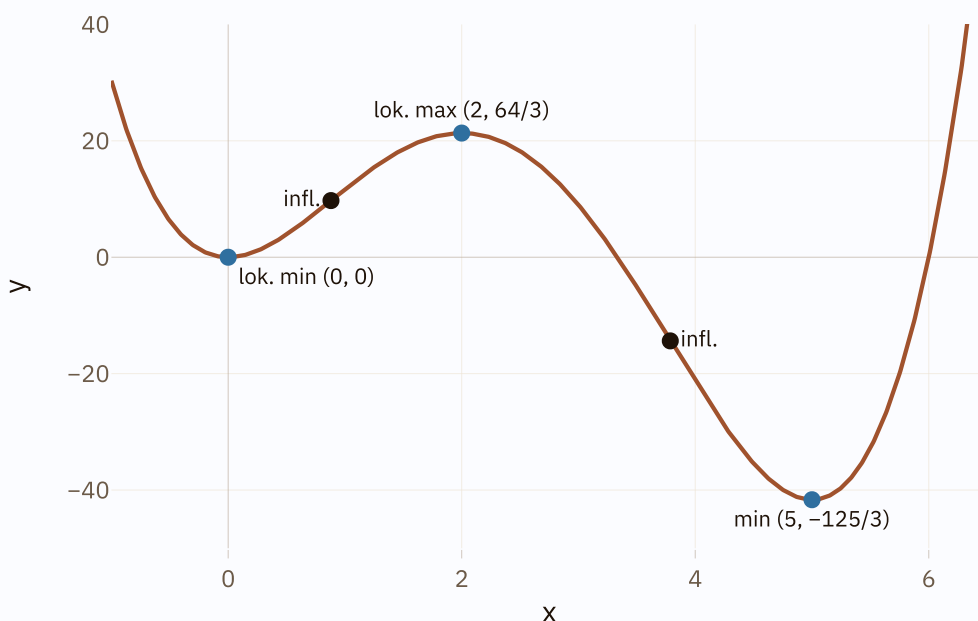
$$f''(x) = 12x^2 - 56x + 40 = 12\left(x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{10}{3}\right) = 0 \iff x = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} - \frac{30}{9}} = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{3}$$

Kalla rötterna $r_1 = \frac{7 - \sqrt{19}}{3} \approx 0,88$ och $r_2 = \frac{7 + \sqrt{19}}{3} \approx 3,79$. Eftersom f'' är en andraderadsfunktion med positiv ledande koefficient är $f'' > 0$ (konvex) för $x < r_1$ och $x > r_2$, och $f'' < 0$ (konkav) för $r_1 < x < r_2$. Andraderivatan byter tecken i båda punkterna:

$$\text{inflexionspunkter i } x = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{3}$$

med funktionsvärdena $f(r_1) = \frac{224\sqrt{19} - 188}{81} \approx 9,73$ och $f(r_2) = -\frac{224\sqrt{19} + 188}{81} \approx -14,38$.
 ($4 < \sqrt{19} < 5$ ger $\frac{2}{3} < r_1 < 1$ och $\frac{11}{3} < r_2 < 4$.)

Skiss. Kurvan kommer från $+\infty$ till vänster, är konvex och sjunker till minimum i origo där den tangerar x -axeln, stiger genom inflexionspunkten vid $x \approx 0,88$ till maximum $(2, \frac{64}{3})$, sjunker genom nollstället $x = \frac{10}{3}$ och inflexionspunkten vid $x \approx 3,79$ ned till det globala minimumet $(5, -\frac{125}{3})$ och växer sedan genom $x = 6$ mot $+\infty$.



Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning skriver $f(3)$ där det ska stå $f(2)$ och anger i teckenschemat för y'' rötterna som $\frac{7 \mp \sqrt{19}}{2}$; båda är skrivfel, uträkningarna och texten ger $f(2) = \frac{64}{3}$ och $x = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{3}$. Inflexionspunkternas y -värden anges inte i facit; de är tillagda här.

6. Den kortaste stegen över en mur

En meter framför ett hus står en $2\sqrt{2}$ meter hög mur. En brandman ska resa en stegen mot huset över muren. Vilken är den kortaste möjliga stegen l brandmannen kan använda för att den ska luta mot huset? (5p)

(I tentan visas en figur: husväggen är lodrät, muren med höjden $2\sqrt{2}$ står på avståndet 1 från husväggen, och stegen med längden l går från marken utanför muren, vilar på murens krön och når husväggen. Enhet: meter.)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett optimeringsproblem: **minimera** en funktion av en variabel på ett öppet intervall.

Ledtråd 2

Låt x vara avståndet från muren till stegens fot och y höjden där stegen når huset. Likformiga trianglar ger $\frac{2\sqrt{2}}{x} = \frac{y}{x+1}$. Minimera $l^2 = (x+1)^2 + y^2$ i stället för l .

Ledtråd 3

$$l^2 = f(x) = (x+1)^2 \left(1 + \frac{8}{x^2}\right) \text{ och } f'(x) = 2(x+1) \left(1 - \frac{8}{x^3}\right).$$

Lösning

Låt $x > 0$ vara avståndet från muren till stegens fot och y höjden där stegen når husväggen. Stegens fot ligger då på avståndet $x + 1$ från huset, och Pythagoras sats ger

$$l^2 = (x+1)^2 + y^2$$

Stegen bildar samma vinkel θ med marken vid muren och vid huset, så likformiga trianglar ger

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{2}}{x} = \frac{y}{x+1} \iff y = \frac{2\sqrt{2}}{x}(x+1)$$

Det räcker att minimera l^2 , dvs.

$$f(x) = (x+1)^2 + \frac{8}{x^2}(x+1)^2 = (x+1)^2 \left(1 + \frac{8}{x^2}\right), \quad 0 < x < \infty$$

Både $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, så minimum antas i en inre punkt. f är deriverbar för $x > 0$:

$$f'(x) = 2(x+1) \left(1 + \frac{8}{x^2}\right) + (x+1)^2 \left(-\frac{16}{x^3}\right) = 2(x+1) \left(1 + \frac{8}{x^2} - \frac{8(x+1)}{x^3}\right) = 2(x+1) \left(1 - \frac{8}{x^3}\right)$$

För $x > 0$ är $x+1 > 0$, så $f'(x) = 0$ precis då $x^3 = 8$, dvs. $x = 2$ (och $f' < 0$ för $0 < x < 2$, $f' > 0$ för $x > 2$). Minimum:

$$f(2) = 3^2 \left(1 + \frac{8}{4}\right) = 27 \implies \boxed{l_{\min} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5,2 \text{ m}}$$

Stegens fot står då 2 m från muren och stegen når husväggen på höjden $y = \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2} \text{ m}$.

Alternativt kan man minimera $g(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; $g'(\theta) = 0$ ger $\tan^3 \theta = (\sqrt{2})^3$, alltså $\tan \theta = \sqrt{2}$ och samma svar $2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- M0065M
- Matematisk induktion
- Talföljder och summor
- Gränsvärden
- Exponentialfunktioner och logaritmer
- Polynom och faktorisering
- Implicit derivering
- Derivata
- Extremvärden
- Grafritning och asymptoter
- Andraderivata och konvexitet