

M0047M-2023-03-23

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2023-03-23 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_230323.pdf, m0047m_230323sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för en formel för n :te derivatan av $x^2 e^x$
- Uppgift 2: gränsvärde i $-\infty$ med rotuttryck, ett $\frac{0}{0}$ -gränsvärde för rationella funktioner och bestämning av konstanter så att ett gränsvärde blir 4
- Uppgift 3: derivatan av $\ln \cos x + x \tan x - \frac{x^2}{2}$ och en olikhet via teckenschema
- Uppgift 4: inverterbarhet för ett tredjegradspolynom, $f^{-1}(3)$ och $(f^{-1})'(3)$
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter för $\frac{(\ln x)^2}{x}$
- Uppgift 6: relaterade hastigheter, sand som rinner ned på en konisk hög

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Derivator av $x^2 e^x$ genom induktion

Bevisa med induktion att det för alla heltal $n = 1, 2, 3, \dots$ gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 e^x) = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x.$$

(5p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1

Ett bevis med **induktion**: basfall och induktionssteg, där steget är en derivering (**produktregeln**).

 Ledtråd 2

Basfallet är $n = 1$. Anta att formeln gäller för $n = p$ och visa den för $n = p + 1$ genom att derivera högerledet för $n = p$ en gång till, eftersom $\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} = \frac{d}{dx} \frac{d^p}{dx^p}$.

 Ledtråd 3

$\frac{d}{dx} [(x^2 + 2px + p^2 - p) e^x] = (2x + 2p)e^x + (x^2 + 2px + p^2 - p) e^x$. Samla termerna och jämför med $x^2 + 2(p + 1)x + (p + 1)p$.

 Lösning

Basfall. För $n = 1$ ger produktregeln

$$\frac{d}{dx} (x^2 e^x) = 2x e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot (1 - 1)) e^x$$

så formeln stämmer.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $p \geq 1$ (induktionsantagandet):

$$\frac{d^p}{dx^p} (x^2 e^x) = (x^2 + 2px + p(p - 1)) e^x$$

Vi ska visa att $\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} (x^2 e^x) = (x^2 + 2(p + 1)x + (p + 1)p) e^x$. Med induktionsantagandet och produktregeln:

$$\begin{aligned} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} (x^2 e^x) &= \frac{d}{dx} [(x^2 + 2px + p^2 - p) e^x] \\ &= (2x + 2p)e^x + (x^2 + 2px + p^2 - p) e^x \\ &= (x^2 + (2p + 2)x + p^2 + p) e^x = (x^2 + 2(p + 1)x + (p + 1)p) e^x \end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$.

Enligt induktionsprincipen gäller

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 e^x) = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x \text{ för alla heltal } n \geq 1$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

(2p)

(c) Bestäm konstanterna a och b så att

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 4.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett **gränsvärde i oändligheten**; (b) och (c) är **Gränsvärden** av typen $\frac{0}{0}$ där man **faktorerar** bort den gemensamma faktorn.

Ledtråd 2

(a) Bryt ut x^2 under roten och kom ihåg att $\sqrt{x^2} = |x|$. (b) $x = 1$ är nollställe till både täljare och nämnare, så båda innehåller faktorn $x - 1$ (faktorsatsen). (c) Nämnaren går mot 0, så täljaren måste också gå mot 0 för att gränsvärdet ska bli ändligt.

Ledtråd 3

(a) För $x < 0$ är $|x| = -x$. (b) $x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2$. (c) Täljaren måste vara $(x - 3)(x - k)$ och gränsvärdet blir $3 - k$.

Lösning

(a) För $x < 0$ är $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, så

$$\frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{x} = \frac{|x| \sqrt{\frac{9}{x^2} + 4}}{x} = -\sqrt{\frac{9}{x^2} + 4} \rightarrow -\sqrt{4}$$

då $x \rightarrow -\infty$, eftersom $\frac{9}{x^2} \rightarrow 0$ och roten är kontinuerlig:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{x} = -2$$

(b) Insättning ger $\frac{0}{0}$. Faktorsatsen ger faktorn $x - 1$ i både täljare och nämnare:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1), \quad x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2$$

Efter förkortning kan vi sätta in $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2} = \frac{1 + 1 + 1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

(c) Nämnaren $x - 3 \rightarrow 0$. Om täljaren hade ett gränsvärde skilt från noll skulle kvoten inte ha något ändligt gränsvärde, så täljaren måste vara 0 i $x = 3$ och därmed (faktorsatsen) innehålla faktorn $x - 3$. Täljaren har ledande koefficient 1, så

$$x^2 + ax + b = (x - 3)(x - k)$$

för något tal k . Då är

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-k)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-k) = 3-k = 4 \iff k = -1$$

Alltså är $x^2 + ax + b = (x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$:

$$a = -2, \quad b = -3$$

Kontrollerat mot facit.

3. En olikhet med $\ln \cos x$ och $x \tan x$

Definiera

$$f(x) = \ln \cos x + x \tan x - \frac{x^2}{2}$$

för $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

(a) Vad är $f'(x)$? Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (2p)

(b) Visa att

$$\ln \cos x + x \tan x \geq \frac{x^2}{2}$$

för

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

(3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är derivering med **kedje- och produktregeln** och **Elementära funktioners derivator**; (b) visar en olikhet genom att bestämma ett **minsta värde** med teckenschema.

Ledtråd 2

$$\frac{d}{dx} \ln \cos x = -\tan x \text{ och } \frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x. \text{ Olikheten i (b) är detsamma som } f(x) \geq 0.$$

Ledtråd 3

$f'(x) = x \tan^2 x$, som har samma tecken som x . Vad är $f(0)$?

Lösning

(a)

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) + \tan x + x(1 + \tan^2 x) - x = -\tan x + \tan x + x + x \tan^2 x - x$$

$$f'(x) = x \tan^2 x$$

(b) Olikheten är ekvivalent med $f(x) \geq 0$ på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. På intervallet är $\tan^2 x \geq 0$ med likhet bara i $x = 0$, så $f'(x) = 0$ endast för $x = 0$:

	$-\frac{\pi}{2} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$
x	-	0	+
$\tan^2 x$	+	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

f är avtagande på $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ och växande på $[0, \frac{\pi}{2})$, så $x = 0$ ger det minsta värdet:

$$f(x) \geq f(0) = \ln \cos 0 + 0 \cdot \tan 0 - 0 = \ln 1 = 0$$

Alltså är

$$\ln \cos x + x \tan x \geq \frac{x^2}{2} \text{ för } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

med likhet endast för $x = 0$.

Kontrollerat mot facit.

4. Invers till ett tredjegradspolynom

Låt

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 7.$$

(a) Visa att f är inverterbar. (2p)

(b) Finn

$$f^{-1}(3).$$

(1p)

(c) Beräkna

$$(f^{-1})'(3).$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Inverterbarhet via monotonitet, och derivatan av en invers.

Ledtråd 2

(a) En strängt växande funktion är injektiv. (b) $f^{-1}(3) = y \iff f(y) = 3$. (c) $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(y)}$ där $y = f^{-1}(3)$.

Ledtråd 3

(a) Kvadratkomplettera: $f'(x) = 3((x-2)^2 + 1)$. (b) Prova små heltal i $y^3 - 6y^2 + 15y - 10 = 0$.

Lösning

(a)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 15 = 3(x^2 - 4x + 5) = 3((x-2)^2 + 1) \geq 3 > 0$$

så f är strängt växande på hela $\mathbb{R}$. Då ger $x_1 < x_2$ alltid $f(x_1) < f(x_2)$, så f är injektiv (ett-till-ett) och därmed

f är inverterbar

(b) $f^{-1}(3) = y \iff f(y) = 3 \iff y^3 - 6y^2 + 15y - 10 = 0$. Vi ser att $y = 1$ är en lösning: $1 - 6 + 15 - 10 = 0$. Eftersom f är injektiv finns ingen annan lösning (det syns också av faktoriseringen $(y - 1)(y^2 - 5y + 10)$, där andragsgradsfaktorn har diskriminant $25 - 40 < 0$). Alltså

$$f^{-1}(3) = 1$$

(c) Sätt $y = f^{-1}(x)$, dvs. $x = f(y)$. Implicit derivering med avseende på x ger $1 = f'(y)y'$, så

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3y^2 - 12y + 15}$$

I $x = 3$ är $y = 1$, så

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{3 - 12 + 15} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $\frac{(\ln x)^2}{x}$

Betrakta funktionen

$$y = \frac{(\ln x)^2}{x}, \quad x > 0.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: gränsvärden i ändpunkterna, **teckenschema för derivatan** och **andraderivatan** för inflexionspunkter.

Ledtråd 2

Undersök $x \rightarrow 0^+$ och $x \rightarrow \infty$ (standardgränsvärdet $\frac{\ln x}{x^a} \rightarrow 0$ för $a > 0$). Derivera med kvotregeln och faktorisera i $\ln x$.

Ledtråd 3

$y' = \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2}$ och $y'' = \frac{2((\ln x)^2 - 3 \ln x + 1)}{x^3}$. Andraderivatans täljare är en andragradsekvation i $\ln x$.

Lösning

Asymptoter. Då $x \rightarrow 0^+$ går $\ln x \rightarrow -\infty$, så

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^2 = +\infty$$

vilket ger den lodräta asymptoten $x = 0$. Då $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x^{1/2}} \right)^2 = 0^2 = 0$$

enligt standardgränsvärdet, så $y = 0$ är vågrät asymptot åt höger. f är kontinuerlig på $(0, \infty)$, så det finns inga andra asymptoter:

$$\boxed{\text{lodrät asymptot } x = 0, \quad \text{vågrät asymptot } y = 0 \text{ då } x \rightarrow \infty}$$

Derivata. Kvotregeln ger

$$y' = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2}$$

Kritiska punkter: $\ln x = 0$ och $\ln x = 2$, dvs. $x = 1$ och $x = e^2$.

	$0 < x < 1$	1	$1 < x < e^2$	e^2	$x > e^2$
$2 - \ln x$	+	+	+	0	-
$\ln x$	-	0	+	+	+

	$0 < x < 1$	1	$1 < x < e^2$	e^2	$x > e^2$
x^2	+	+	+	+	+
y'	-	0	+	0	-
y	↘	lok. min	↗	lok. max	↘

$$\boxed{\text{lok. min } y(1) = 0, \quad \text{lok. max } y(e^2) = \frac{4}{e^2}}$$

Minimet är också globalt, eftersom $y \geq 0$.

Andraderivata.

$$y'' = \frac{\left(\frac{2}{x} - \frac{2 \ln x}{x}\right)x^2 - (2 \ln x - (\ln x)^2)2x}{x^4} = \frac{2((\ln x)^2 - 3 \ln x + 1)}{x^3}$$

Täljaren är noll då

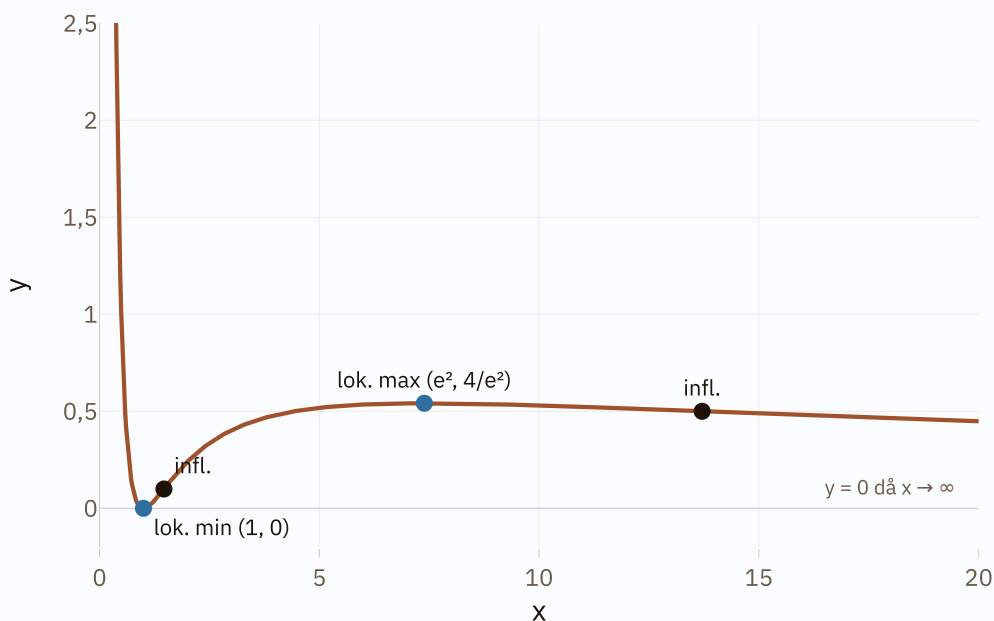
$$\ln x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Sätt $x_1 = e^{(3-\sqrt{5})/2} \approx 1,47$ och $x_2 = e^{(3+\sqrt{5})/2} \approx 13,7$. Eftersom $x^3 > 0$ och täljaren är en andragsgradsfunktion i $\ln x$ med positiv ledande koefficient är $y'' > 0$ (konvex) för $0 < x < x_1$ och $x > x_2$, och $y'' < 0$ (konkav) för $x_1 < x < x_2$. Teckenbytena ger två inflexionspunkter. Med $s = \ln x$ är $y = s^2 e^{-s}$, så

$$\boxed{\text{inflexionspunkter i } x = e^{(3 \pm \sqrt{5})/2}, \quad y = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 e^{-(3 \pm \sqrt{5})/2}}$$

dvs. ungefär $(1,47; 0,100)$ och $(13,7; 0,500)$. Eftersom $0 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 2 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ligger x_1 mellan 1 och e^2 och x_2 till höger om e^2 .

Skiss. Kurvan kommer ned från $+\infty$ längs y -axeln, tangerar x -axeln i minimet $(1, 0)$, vänder från konvex till konkav i x_1 , stiger till maximum $(e^2, \frac{4}{e^2}) \approx (7,39; 0,541)$, sjunker, blir konvex igen efter x_2 och närmar sig x -axeln ovanifrån.



Kontrollerat mot facit.

6. Sand på en konisk hög

Sand rinner ner på en konisk hög med en hastighet av $\frac{1}{2} \text{ m}^3/\text{min}$. Antag att högen hela tiden bibehåller formen av en rak cirkulär kon där förhållandet $h : r$ mellan höjden h och radien r är $1 : 2$.

- (a) Hur fort ökar höjden på konen vid den tidpunkt när högen är 2 m hög? (3p)
- (b) Vid vilken höjd ökar höjden på konen med 40 mm/min? (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Relaterade hastigheter: **Implicit derivering** av ett samband med avseende på tiden.

Ledtråd 2

Konens volym är $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Uttryck V med enbart h med hjälp av $r = 2h$, och derivera med avseende på t (kedjeregeln).

Ledtråd 3

$$V = \frac{4\pi h^3}{3} \text{ ger } V'(t) = 4\pi h^2 h'(t), \text{ där } V'(t) = \frac{1}{2}.$$

Lösning

(a) Förhållandet $h : r = 1 : 2$ ger $r = 2h$, så

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi (2h)^2 h}{3} = \frac{4\pi h^3}{3}$$

Både V och h beror av tiden. Derivering med avseende på t ger

$$V'(t) = \frac{4\pi}{3} \cdot 3h^2 h'(t) = 4\pi h^2 h'(t) \iff h'(t) = \frac{V'(t)}{4\pi h^2} = \frac{1}{8\pi h^2}$$

eftersom $V'(t) = \frac{1}{2} \text{ m}^3/\text{min}$. När $h = 2 \text{ m}$:

$$h'(t_0) = \frac{1}{8\pi \cdot 2^2} = \frac{1}{32\pi} \text{ m/min} \approx 0,0099 \text{ m/min} \approx 1 \text{ cm/min}$$

(b) $40 \text{ mm/min} = 0,04 \text{ m/min} = \frac{1}{25} \text{ m/min}$. Ur $h' = \frac{1}{8\pi h^2}$:

$$h^2 = \frac{1}{8\pi h'} = \frac{25}{8\pi} \implies h = \sqrt{\frac{25}{8\pi}} = \frac{5}{2\sqrt{2\pi}} \text{ m} \approx 0,997 \text{ m}$$

alltså ungefär 1 m (eftersom $8\pi \approx 25$).

Kontrollerat mot facit.

Se även

- M0065M
- Matematisk induktion
- Gränsvärden
- Oegentliga gränsvärden
- Polynom och faktorisering
- Deriveringsregler

- Elementära funktioners derivator
 - Extremvärden
 - Funktioner och invers
 - Inversa funktioners derivata
 - Grafitning och asymptoter
 - Andraderivata och konvexitet
 - Implicit derivering
-