

M0047M-2022-12-20

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2022-12-20 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_221220.pdf, m0047m_221220sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: sammansättning $f \circ f$ och ett induktionsbevis för den n :te itererade funktionen till $f(x) = 2x - 3$
- Uppgift 2: tre gränsvärden, $\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{\ln x}}$ i oändligheten, en trigonometrisk kvot och $(x^2 - 4)^{x-2}$ då $x \rightarrow 2^+$
- Uppgift 3: tangenter till $y = x^2 - 3x + 7$ genom en punkt utanför kurvan
- Uppgift 4: Taylorpolynom för $\sqrt[3]{x}$ kring 8, approximation av $\sqrt[3]{10}$, MATLAB-plottning och feluppskattning
- Uppgift 5: extremvärden, konvexitet och asymptoter för $\frac{x^2 + 3x - 4}{x}$ samt injektivitet
- Uppgift 6: kortaste avståndet från origo till kurvan $y = e^{-x^2}$

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Itererade funktioner och induktion

Låt

$$f(x) = 2x - 3.$$

(a) Bestäm

$$f_2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)).$$

(1p)

(b) Visa med induktion att den n :te itererade funktionen f_n till f är

$$f_n(x) = 2^n x - 3 \cdot 2^n + 3, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

där

$$f_1 = f, \quad f_2 = f \circ f, \quad f_3 = f \circ f \circ f, \quad \text{osv.}$$

(4p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Sammansättning av **Funktioner** och ett bevis med **induktion**.

Ledtråd 2

(a) Sätt in $2x - 3$ i stället för x i f . (b) Basfallet är $n = 1$. Anta formeln för $n = p$ och använd att $f_{p+1} = f \circ f_p$, dvs. $f_{p+1}(x) = f(f_p(x))$.

Ledtråd 3

$$f(f_p(x)) = 2f_p(x) - 3 = 2(2^p x - 3 \cdot 2^p + 3) - 3. \text{ Multipluera in tvåan.}$$

Lösning

(a)

$$f_2(x) = f(f(x)) = f(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3 = \boxed{4x - 9}$$

(b) **Basfall.** För $n = 1$ är högerledet $2^1 x - 3 \cdot 2^1 + 3 = 2x - 3 = f(x) = f_1(x)$. Formeln gäller.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $n = p \geq 1$, dvs. att

$$f_p(x) = 2^p x - 3 \cdot 2^p + 3 \quad (\text{induktionsantagandet})$$

Eftersom f_{p+1} är f sammansatt $p + 1$ gånger är $f_{p+1} = f \circ f_p$, så

$$\begin{aligned} f_{p+1}(x) &= f(f_p(x)) = 2f_p(x) - 3 = 2(2^p x - 3 \cdot 2^p + 3) - 3 \\ &= 2^{p+1}x - 3 \cdot 2^{p+1} + 6 - 3 = 2^{p+1}x - 3 \cdot 2^{p+1} + 3 \end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller

$$f_n(x) = 2^n x - 3 \cdot 2^n + 3 \text{ för alla heltal } n \geq 1$$

Kontroll: för $n = 2$ ger formeln $4x - 12 + 3 = 4x - 9$, samma som i (a).

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{\ln x}}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin 4x}$$

Ledning: dubbla vinkeln. (2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4)^{x-2}.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett oegentligt gränsvärde med logaritmlagar; (b) är ett $[\frac{0}{0}]$ -gränsvärde som löses med trigonometriska formler; (c) är av typen $[0^0]$.

Ledtråd 2

(a) $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$. (b) Faktoriserar täljaren som en konjugatregel och använd $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ och $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$. (c) Skriv $(x^2 - 4)^{x-2} = e^{(x-2) \ln(x^2-4)}$ och studera exponenten.

Ledtråd 3

(a) Kvoten blir $\frac{1}{2} \sqrt{\ln x}$. (b) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$ och $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$. (c) $\ln(x^2 - 4) = \ln(x - 2) + \ln(x + 2)$; med $t = x - 2$ hjälper standardgränsvärdet $t \ln t \rightarrow 0$ då $t \rightarrow 0^+$.

Lösning

(a) Eftersom $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ är, för $x > 1$,

$$\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{\ln x}} = \frac{\frac{1}{2} \ln x}{\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\ln x}$$

och $\ln x \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{\ln x}} = +\infty$$

(b) Konjugatregeln och trigonometriska ettan ger

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x \cdot 1 = \cos 2x$$

och dubbla vinkeln med $\theta = 2x$ ger $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$. För $x \neq \frac{\pi}{4}$ nära $\frac{\pi}{4}$ är $\cos 2x \neq 0$, så vi kan förkorta:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2 \sin 2x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \sin 2x} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(c) Gränsvärdet är av typen $[0^0]$. För $x > 2$ är $x^2 - 4 > 0$ och

$$(x^2 - 4)^{x-2} = e^{(x-2) \ln(x^2-4)}, \quad (x-2) \ln(x^2-4) = (x-2) \ln(x-2) + (x-2) \ln(x+2)$$

Med $t = x - 2 \rightarrow 0^+$ blir exponenten

$$t \ln t + t \ln(t+4) \rightarrow 0 + 0 \cdot \ln 4 = 0$$

där $t \ln t \rightarrow 0$ är ett standardgränsvärde. Exponentialfunktionen är kontinuerlig, så

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4)^{x-2} = e^0 = 1$$

Kontrollerat mot facit.

3. Tangenter genom en punkt utanför kurvan

Finn alla tangenter till kurvan

$$y = f(x) = x^2 - 3x + 7$$

som går genom punkten $(2, -4)$. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En tangentuppgift med **derivatan** som lutning, där tangeringspunkten är okänd.

Ledtråd 2

Kontrollera först att $(2, -4)$ inte ligger på kurvan. Låt tangeringspunkten vara $(a, f(a))$; tangenten är $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Kräv att den går genom $(2, -4)$.

Ledtråd 3

Tangenten är $y = (2a - 3)x - a^2 + 7$. Insättning av $(2, -4)$ ger $a^2 - 4a - 5 = 0$.

Lösning

Eftersom $f(2) = 4 - 6 + 7 = 5 \neq -4$ ligger punkten $(2, -4)$ inte på kurvan, så tangeringspunkten är någon annan punkt $(a, f(a))$. Lutningen där är $f'(a) = 2a - 3$, och enpunktsformeln ger tangenten

$$y = (a^2 - 3a + 7) + (2a - 3)(x - a) = (2a - 3)x - a^2 + 7$$

Den ska gå genom $(2, -4)$:

$$-4 = 2(2a - 3) - a^2 + 7 \iff a^2 - 4a - 5 = 0 \iff (a + 1)(a - 5) = 0$$

så $a = -1$ eller $a = 5$.

- $a = -1$: lutning -5 , tangeringspunkt $(-1, 11)$, tangent $y = -5x - 1 + 7 = 6 - 5x$.
- $a = 5$: lutning 7 , tangeringspunkt $(5, 17)$, tangent $y = 7x - 25 + 7 = 7x - 18$.

$$y = 6 - 5x \quad \text{och} \quad y = 7x - 18$$

Kontroll: $6 - 5 \cdot 2 = -4$ och $7 \cdot 2 - 18 = -4$.

Kontrollerat mot facit.

4. Taylorpolynom för $\sqrt[3]{x}$ kring 8

Låt

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

- (a) Finn andra ordningens Taylorpolynom $P_2(x)$ till $f(x)$ kring punkten 8. (3p)
- (b) Använd $P_2(x)$ för att finna en rationell approximation till $\sqrt[3]{10}$. (1p)
- (c) **(M0047M)**: Beskriv med MATLAB-kod/kommandon hur vi kan rita upp kurvorna

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x}$$

och

$$y = P_2(x)$$

i samma graf. Markera $\sqrt[3]{10}$. (1p)

- (c) **(M0029M)**: Finn en uppskattning på hur stort fel som görs i approximationen i uppgift 4.(b) med hjälp av Lagranges restterm. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Taylor's formel kring en punkt $a \neq 0$, med Lagranges restterm för feluppskattningen.

Ledtråd 2

$P_2(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{f''(8)}{2}(x-8)^2$ med $f(x) = x^{1/3}$. Resttermen är $E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-8)^3$ för något s mellan 8 och x .

Ledtråd 3

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ och $f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$. Använd $\sqrt[3]{8} = 2$. I (c) är $f'''(s)$ avtagande, så det största värdet på $[8, 10]$ fås i $s = 8$.

Lösning

(a) Med $f(x) = x^{1/3}$ är

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9(\sqrt[3]{x})^5}$$

så med $\sqrt[3]{8} = 2$:

$$f(8) = 2, \quad f'(8) = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}, \quad f''(8) = -\frac{2}{9 \cdot 32} = -\frac{1}{144}$$

$$P_2(x) = 2 + \frac{x-8}{12} - \frac{(x-8)^2}{288}$$

(b)

$$\sqrt[3]{10} \approx P_2(10) = 2 + \frac{2}{12} - \frac{4}{288} = 2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{72} = \frac{155}{72} \approx 2,1528$$

(c) (M0047M) Exempelvis (lärarens kod):

```

1 x = 0:0.01:20;
2 f = @(x) x.^(1/3);
3 p2 = @(x) 2+(x-8)/12-(x-8).^2/288;
4 y1 = f(x);
5 y2 = p2(x);
6 plot(x,y1,x,y2,10,10^(1/3),'k*');
7 legend('y=f(x)', 'y=p_2(x)', 'Punkten (10,10^{1/3})');

```

Det viktiga är punktvisa operationer (`.`[^]), ett x -intervall som innehåller både 8 och 10, att båda kurvorna ritas i samma `plot` (eller med `hold on`) och att punkten $(10, \sqrt[3]{10})$ markeras med en egen markör.

(c) (M0029M) Lagranges restterm ger

$$E_2(10) = \frac{f'''(s)}{3!}(10-8)^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{27s^{8/3}} \cdot 8 = \frac{40}{81s^{8/3}}$$

för något $s \in (8, 10)$. Felet är alltså positivt, dvs. $P_2(10)$ är en underskattning. Uttrycket är avtagande i s , så

$$0 < E_2(10) < \frac{40}{81 \cdot 8^{8/3}} = \frac{40}{81 \cdot 256} = \boxed{\frac{5}{2592} \approx 0,0019}$$

och därmed

$$\frac{155}{72} < \sqrt[3]{10} < \frac{155}{72} + \frac{5}{2592}$$

Det verkliga felet är ungefär 0,0017.

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning skriver gränsen som $\frac{5}{3^4 \cdot 2^5}$, vilket är samma tal.

5. Kurvan $\frac{x^2 + 3x - 4}{x}$

Låt

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden, konvexitet och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Skissera kurvan. (4p)

(b) Är funktionen f injektiv (1 – 1)? Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning av en rationell funktion med teckenschema för derivatan och andraderivatan; (b) handlar om injektivitet.

Ledtråd 2

Polynomdivision: $f(x) = x + 3 - \frac{4}{x}$. Det ger den sneda asymptoten direkt, och derivatorna blir enkla. För (b): leta efter två olika x med samma funktionsvärde, t.ex. nollställena.

Ledtråd 3

$$f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} > 0 \text{ och } f''(x) = -\frac{8}{x^3}. \text{ Täljaren är } (x+4)(x-1).$$

Lösning

(a) Täljaren är $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$, så kurvan skär x -axeln i $x = -4$ och $x = 1$. Division ger

$$f(x) = x + 3 - \frac{4}{x}$$

Asymptoter. Eftersom $f(x) - (x+3) = -\frac{4}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm\infty$ är $y = x+3$ en sned asymptot åt båda hållen (och $f(x) \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$, så det finns ingen vågrät asymptot). Vid $x = 0$ går täljaren mot -4 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

lodrät asymptot $x = 0$, sned asymptot $y = x + 3$ då $x \rightarrow \pm\infty$

Dessutom är $f(x) - 3 = x - \frac{4}{x}$ udda, så kurvan är symmetrisk kring punkten $(0, 3)$.

Derivator.

$$f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}, \quad f''(x) = -\frac{8}{x^3}$$

$f'(x) > 0$ för alla $x \neq 0$, så det finns inga kritiska punkter, och f'' saknar nollställen.

	$x < 0$	0	$x > 0$
$x^2 + 4$	+	+	+
x^2	+	0	+
$f'(x)$	+	odef.	+
-8	-	-	-
x^3	-	0	+
$f''(x)$	+	odef.	-
$f(x)$	↗, konvex	asymptot	↘, konkav

inga lokala extremvärden; strängt växande och konvex på $(-\infty, 0)$, strängt växande och konkav på $(0, \infty)$.

Det finns inga inflexionspunkter, eftersom $x = 0$ inte ligger i definitionsmängden.

Skiss. Till vänster om y -axeln kommer kurvan underifrån längs asymptoten $y = x + 3$ (den ligger ovanför asymptoten eftersom $-\frac{4}{x} > 0$ där), passerar $(-4, 0)$ och växer mot $+\infty$ vid $x = 0^-$. Till höger om y -axeln kommer den från $-\infty$, passerar $(1, 0)$ och närmar sig asymptoten underifrån.

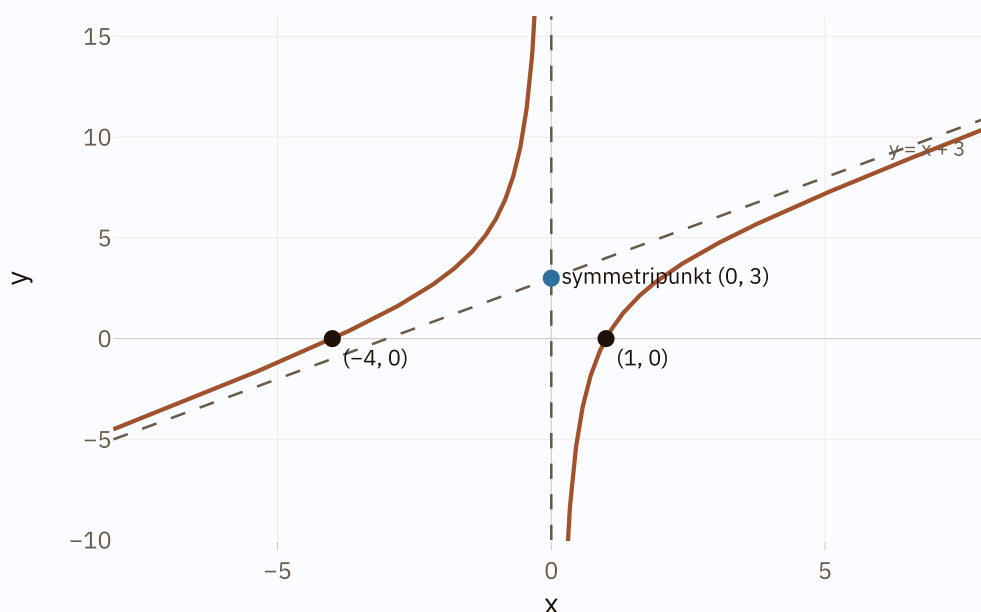
(b) Nej. f är injektiv om $f(x_1) = f(x_2)$ medför $x_1 = x_2$, men

$$f(-4) = f(1) = 0$$

med $-4 \neq 1$. Mer allmänt har $f(x) = C$, dvs. $x^2 + (3 - C)x - 4 = 0$, diskriminanten $(C - 3)^2 + 16 > 0$ och därför två olika reella lösningar för varje C (deras produkt är -4 , så ingen av dem är 0). Alltså

f är inte injektiv

Anmärkning: att $f' > 0$ överallt räcker inte, eftersom definitionsmängden inte är ett intervall.



Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning anger 5p för (a) medan tentan anger 4p; innehållet är detsamma.

6. Kortaste avståndet till $y = e^{-x^2}$

Vad är (kortaste) avståndet mellan origo och grafen till kurvan $y = f(x) = e^{-x^2}$? I vilken punkt antas minimum? (5p)

(Tentan visar en figur av kurvan för $-2 \leq x \leq 2$ med en sträcka från origo till en punkt på kurvan.)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En optimeringsuppgift: **Extremvärden** av en funktion på hela $\mathbb{R}$.

Ledtråd 2

Avståndet från origo till punkten (a, e^{-a^2}) är $\sqrt{a^2 + e^{-2a^2}}$. Minimera kvadraten $g(a) = a^2 + e^{-2a^2}$ i stället; den har samma minimipunkt.

Ledtråd 3

$g'(a) = 2a(1 - 2e^{-2a^2})$. Jämför värdena i alla kritiska punkter, och kontrollera att $g \rightarrow \infty$ då $a \rightarrow \pm\infty$.

Lösning

Avståndet från origo till punkten (a, e^{-a^2}) på kurvan är

$$d(a) = \sqrt{a^2 + e^{-2a^2}}$$

Eftersom roten är strängt växande räcker det att minimera

$$g(a) = d(a)^2 = a^2 + e^{-2a^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

g är deriverbar och jämn, och $g(a) \rightarrow \infty$ då $a \rightarrow \pm\infty$ (eftersom $a^2 \rightarrow \infty$ och $e^{-2a^2} \rightarrow 0$). Minimum antas därför i en kritisk punkt.

$$g'(a) = 2a - 4ae^{-2a^2} = 2a(1 - 2e^{-2a^2})$$

Kritiska punkter: $a = 0$, eller

$$e^{-2a^2} = \frac{1}{2} \iff 2a^2 = \ln 2 \iff a = \pm\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$$

Värdena:

$$g(0) = 1, \quad g\left(\pm\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}\right) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \ln 2}{2}$$

Eftersom $\ln 2 < 1$ (ty $2 < e$) är $\frac{1 + \ln 2}{2} < 1$, så $a = 0$ ger ett lokalt maximum av avståndet och de två andra punkterna ger minimum. I dessa punkter är $y = e^{-a^2} = e^{-\ln 2/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{1 + \ln 2}{2}} \approx 0,920, \quad \text{antas i } \left(\pm\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx (\pm 0,589; 0,707)$$

Anmärkning: i minimipunkten är kurvans tangent vinkelrät mot sträckan till origo. Lutningarna är $-2ae^{-a^2}$ och $\frac{e^{-a^2}}{a}$, och produkten -1 ger just $2e^{-2a^2} = 1$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
 - [Matematisk induktion](#)
 - [Funktioner](#)
 - [Funktioner och invers](#)
 - [Gränsvärden](#)
 - [Oegentliga gränsvärden](#)
 - [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
 - [Trigonometri](#)
 - [Derivata](#)
 - [Taylors formel](#)
 - [Extremvärden](#)
 - [Grafritning och asymptoter](#)
 - [Andraderivata och konvexitet](#)
-