

M0047M-2022-10-27

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2022-10-27 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_221027.pdf, m0047m_221027sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för den n :te derivatan av xe^{2x} och en primitiv funktion ur formeln
- Uppgift 2: tre gränsvärden: kvot av logaritmer, faktorisering och rotkonjugat
- Uppgift 3: två cirklar som skär varandra under räta vinklar (implicit derivering)
- Uppgift 4: värdemängd, invers och en sammansatt ekvation för $\frac{3x-1}{x+2}$
- Uppgift 5: extremvärden, asymptoter och värdemängd för $(x^2-9)e^{-x/4}$
- Uppgift 6: relaterade hastigheter, vattendjupet i en sfärisk tank som töms

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Derivator av xe^{2x} genom induktion

Låt oss undersöka derivator av funktionen

$$f(x) = xe^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^{2x}) = 2^{n-1}(n+2x)e^{2x}.$$

(4p)

(b) Använd formeln i uppgift 1(a) för att finna en *primitiv funktion* (Adams: *antiderivata*) till $f(x) = xe^{2x}$, dvs. utnyttja formeln för att gissa en funktion $F(x)$ som har derivata $f(x)$ och visa sedan att $F'(x) = f(x)$. **Ledning:** vilket n borde i så fall primitiva funktionen motsvaras av? (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett bevis med **induktion** där induktionssteget är en **derivering** med produktregeln (**Deriveringsregler**).

Ledtråd 2

Basfallet är $n = 1$. Anta att formeln gäller för $n = p$ och derivera båda leden en gång till:

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} = \frac{d}{dx} \frac{d^p}{dx^p}.$$

Ledtråd 3

$\frac{d}{dx} ((p+2x)e^{2x}) = 2e^{2x} + 2(p+2x)e^{2x} = 2(p+1+2x)e^{2x}$. (b) Derivatan motsvarar $n = 1$, funktionen själv $n = 0$, så prova $n = -1$.

Lösning

(a) Basfall. För $n = 1$ ger produktregeln

$$\frac{d}{dx} (xe^{2x}) = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = (1+2x)e^{2x} = 2^{1-1}(1+2x)e^{2x}$$

så formeln stämmer.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något positivt heltal $n = p$, dvs.

$$\frac{d^p}{dx^p} (xe^{2x}) = 2^{p-1}(p+2x)e^{2x} \quad (\text{induktionsantagandet})$$

Då är

$$\begin{aligned}\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(xe^{2x}) &= \frac{d}{dx}(2^{p-1}(p+2x)e^{2x}) = 2^{p-1}(2e^{2x} + (p+2x) \cdot 2e^{2x}) \\ &= 2^p(1+p+2x)e^{2x} = 2^{(p+1)-1}((p+1)+2x)e^{2x}\end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller

$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n}(xe^{2x}) = 2^{n-1}(n+2x)e^{2x} \text{ för alla heltal } n \geq 1}$$

(b) Förstaderivatan motsvaras av $n = 1$ och funktionen själv av $n = 0$ (formeln ger $2^{-1} \cdot 2x e^{2x} = xe^{2x}$). En primitiv funktion borde då motsvaras av $n = -1$:

$$F(x) = 2^{-2}(-1+2x)e^{2x} = \frac{2x-1}{4}e^{2x}$$

Kontroll med produktregeln:

$$F'(x) = \frac{1}{4}(2e^{2x} + (2x-1) \cdot 2e^{2x}) = \frac{2+4x-2}{4}e^{2x} = xe^{2x} = f(x)$$

Alltså är

$$\boxed{F(x) = \frac{2x-1}{4}e^{2x}}$$

en primitiv funktion till f .

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 7x}{\ln 3x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x}.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden av typen $\frac{\infty}{\infty}$ och $\frac{0}{0}$ som räknas om algebraiskt: **logaritmlagar**, **faktorisering** och förlängning med rotkonjugat.

Ledtråd 2

(a) $\ln 7x = \ln 7 + \ln x$; dela täljare och nämnare med $\ln x$. (b) Både täljare och nämnare är noll i $x = -2$, så båda har faktorn $x + 2$. (c) Förläng med $\sqrt{1 + \sin x} + 1$.

Ledtråd 3

(b) Täljaren är en jämn kvadrat: $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$. (c) Efter förlängningen blir täljaren $\sin x$, och $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

Lösning

(a) Med $\ln 7x = \ln 7 + \ln x$ och $\ln 3x = \ln 3 + \ln x$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 7x}{\ln 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln 7}{\ln x} + 1}{\frac{\ln 3}{\ln x} + 1} = \frac{0 + 1}{0 + 1} = \boxed{1}$$

eftersom $\ln x \rightarrow \infty$ när $x \rightarrow \infty$.

(b) Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$. Med $t = x^2$ är täljaren $t^2 - 8t + 16 = (t - 4)^2$, så

$$\frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4} = \frac{(x^2 - 4)^2}{x^2 - 4} = x^2 - 4, \quad x \neq \pm 2$$

och

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 4) = 4 - 4 = \boxed{0}$$

Alternativt: faktorsatsen och polynomdivision ger $x^4 - 8x^2 + 16 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)$, och efter förkortning med $x + 2$ blir gränsvärdet $\frac{-8 - 8 + 8 + 8}{-4} = 0$.

(c) Förlängning med rotkonjugatet:

$$\frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x} = \frac{(1 + \sin x) - 1}{x(\sqrt{1 + \sin x} + 1)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x} + 1}$$

Här är $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ och $\sqrt{1 + \sin x} \rightarrow 1$ (kontinuitet), så

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Två cirklar som skär varandra vinkelrätt

Visa att kurvorna

$$x^2 + y^2 = 9$$

och

$$x^2 - 10x + y^2 = -9$$

skär varandra under räta vinklar. **Ledning:** visa först att kurvorna skär varandra och visa sedan att tangenterna till kurvorna i skärningspunkterna är vinkelräta mot varandra. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Skärningspunkter ur ett ekvationssystem och tangentlutningar med **Implicit derivering**.

Ledtråd 2

Subtrahera ekvationerna för att få x -koordinaten. Derivera sedan båda ekvationerna implicit med avseende på x och lös ut y' . Två linjer med lutningarna k_1 och k_2 är vinkelräta om $k_1 k_2 = -1$.

Ledtråd 3

Skillnaden ger $10x = 18$. Lutningarna blir $k_1 = -\frac{x}{y}$ och $k_2 = \frac{5-x}{y}$.

Lösning

Skärningspunkter. En skärningspunkt (a, b) uppfyller båda ekvationerna:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ a^2 - 10a + b^2 = -9 \end{cases}$$

Den första minus den andra ger $10a = 18$, dvs. $a = \frac{9}{5}$. Insättning i den första:

$$b^2 = 9 - \frac{81}{25} = \frac{225 - 81}{25} = \frac{144}{25} \implies b = \pm \frac{12}{5}$$

Kurvorna skär alltså varandra i de två punkterna $(\frac{9}{5}, \pm \frac{12}{5})$.

Tangentlutningar. Implicit derivering med avseende på x (med $y = y(x)$) ger

$$2x + 2yy' = 0 \iff y' = -\frac{x}{y}, \quad 2x - 10 + 2yy' = 0 \iff y' = \frac{5-x}{y}$$

vilket gäller där $y \neq 0$, som i båda skärningspunkterna. Lutningarna i en skärningspunkt (a, b) är $k_1 = -\frac{a}{b}$ och $k_2 = \frac{5-a}{b}$, och

$$k_1 k_2 = -\frac{a(5-a)}{b^2} = -\frac{\frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}}{\frac{144}{25}} = -\frac{144/25}{144/25} = -1$$

Produkten är -1 i båda punkterna (den beror bara på b^2), så tangenterna är vinkelräta:

kurvorna skär varandra under rätta vinklar i $(\frac{9}{5}, \pm \frac{12}{5})$

Anmärkning: kvadratkomplettering ger $(x - 5)^2 + y^2 = 4^2$, så kurvorna är cirklar med medelpunkterna $(0, 0)$ och $(5, 0)$ och radierna 3 och 4. Eftersom $3^2 + 4^2 = 5^2$ är radierna till en skärningspunkt vinkelräta, och tangenten till en cirkel är vinkelrät mot radien, så tangenterna är också vinkelräta.

Kontrollerat mot facit.

4. Värdeområde och invers till $\frac{3x-1}{x+2}$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = \frac{3x-1}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

- (a) Bestäm funktionens värdeområde. Motivera! (2p)
- (b) Finn inversen f^{-1} till f . (2p)
- (c) Bestäm funktionen g om

$$f(g(x)) = 7x - 4.$$

(1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Funktioner och invers: värdeområde via monotonitet och **gränsvärden**, invers genom att lösa ut x .

Ledtråd 2

- (a) Derivera och undersök gränsvärdena då $x \rightarrow \pm\infty$ och $x \rightarrow -2^\pm$. (b) Lös $x = \frac{3y-1}{y+2}$ för y .
- (c) Använd $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$.

Ledtråd 3

$f'(x) = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$ och $f(x) \rightarrow 3$ då $x \rightarrow \pm\infty$. Värdet 3 antas aldrig. (c) $g(x) = f^{-1}(7x - 4)$.

Lösning

(a) Kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$$

så f är strängt växande på vart och ett av intervallen $(-\infty, -2)$ och $(-2, \infty)$. Gränsvärdena är

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

eftersom täljaren går mot -7 medan nämnaren går mot 0 från vänster respektive höger. f är kontinuerlig på varje intervall, så på $(-\infty, -2)$ växer $f(x)$ från 3 mot $+\infty$ och antar alla värden i $(3, \infty)$, och på $(-2, \infty)$ växer $f(x)$ från $-\infty$ mot 3 och antar alla värden i $(-\infty, 3)$. Värdet 3 antas aldrig, eftersom $3x - 1 = 3(x + 2)$ ger $-1 = 6$. Alltså

$$V_f = (-\infty, 3) \cup (3, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

(b) f är injektiv: den är strängt växande på varje intervall och bilderna $(3, \infty)$ och $(-\infty, 3)$ är disjunkta. Sätt $x = f(y)$ och lös ut y :

$$x = \frac{3y-1}{y+2} \iff xy + 2x = 3y - 1 \iff 2x + 1 = (3-x)y \iff y = \frac{2x+1}{3-x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3-x}, \quad x \notin 3$$

(c) Tillämpa f^{-1} på båda leden:

$$g(x) = f^{-1}(7x-4) = \frac{2(7x-4)+1}{3-(7x-4)} = \frac{14x-7}{7-7x}$$

$$g(x) = \frac{2x-1}{1-x}, \quad x \notin 1$$

$$\text{Kontroll: } f(g(x)) = \frac{3 \cdot \frac{2x-1}{1-x} - 1}{\frac{2x-1}{1-x} + 2} = \frac{6x-3-1+x}{2x-1+2-2x} = 7x-4.$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $(x^2 - 9)e^{-x/4}$

Definiera funktionen

$$y = f(x) = (x^2 - 9)e^{-x/4}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema. Konvexitet behöver ej beaktas. Skissera kurvan. (4p)

(b) Bestäm funktionens värdemängd. Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning med teckenschema för derivatan; värdemängden följer av extremvärdena och gränsvärdena.

Ledtråd 2

Undersök $x \rightarrow \infty$ (exponentialfunktionen dominerar potensfunktioner), $x \rightarrow -\infty$ och $f(x)/x$ då $x \rightarrow -\infty$. Derivera med produktregeln.

Ledtråd 3

$$f'(x) = -\frac{(x+1)(x-9)}{4}e^{-x/4}.$$

Lösning

Nollställen. $f(x) = (x+3)(x-3)e^{-x/4}$, så kurvan skär x-axeln i $x = \pm 3$ och y-axeln i $f(0) = -9$.

Asymptoter. f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så det finns inga lodräta asymptoter. Åt höger:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{e^{x/4}} - \frac{9}{e^{x/4}} \right) = 0 - 0 = 0$$

eftersom exponentialfunktionen dominerar potensfunktionen. Alltså är $y = 0$ vågrät asymptot då $x \rightarrow \infty$. Åt vänster, med $t = -x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 - 9)e^{t/4} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-t + \frac{9}{t}\right)e^{t/4} = -\infty$$

så det finns ingen sned asymptot åt vänster.

enda asymptoten är $y = 0$ då $x \rightarrow \infty$

Derivata.

$$f'(x) = 2xe^{-x/4} - \frac{1}{4}(x^2 - 9)e^{-x/4} = \frac{-x^2 + 8x + 9}{4}e^{-x/4} = -\frac{(x+1)(x-9)}{4}e^{-x/4}$$

Kritiska punkter: $x = -1$ och $x = 9$.

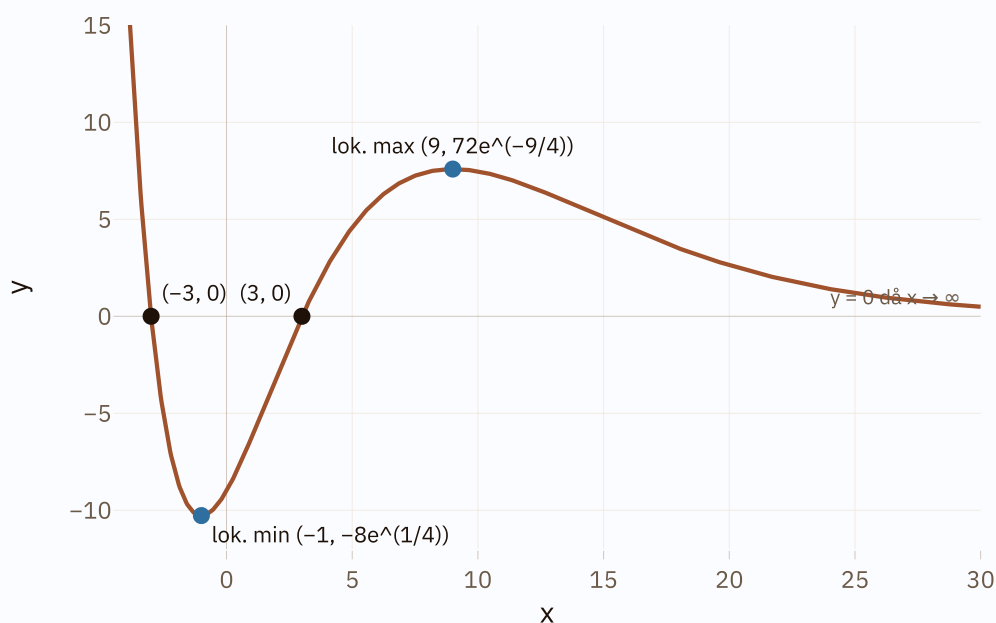
	$x < -1$	-1	$-1 < x < 9$	9	$x > 9$
$x + 1$	–	0	+	+	+
$x - 9$	–	–	–	0	+
$-\frac{e^{-x/4}}{4}$	–	–	–	–	–
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	lok. min	↗	lok. max	↘

lok. min $f(-1) = -8e^{1/4} \approx -10,27$, lok. max $f(9) = 72e^{-9/4} \approx 7,59$

Skiss. Kurvan kommer ned från $+\infty$ till vänster, skär x -axeln i $x = -3$, når minimum i $(-1, -8e^{1/4})$, stiger genom $(0, -9)$ och $(3, 0)$ till maximum i $(9, 72e^{-9/4})$ och avtar sedan mot asymptoten $y = 0$ ovanifrån. (Andraderivatan är $\frac{x^2 - 16x + 23}{16}e^{-x/4}$, så inflexionspunkterna ligger i $x = 8 \pm \sqrt{41}$, ungefär 1,6 och 14,4.)

(b) Till vänster om $x = -1$ avtar f från $+\infty$ ned till $f(-1)$, och till höger om $x = -1$ är $f(x) > f(-1)$: på $(-1, 9]$ växer f , och för $x > 9$ är $f(x) > 0 > f(-1)$. Alltså är $f(-1) = -8e^{1/4}$ globalt minimum. Eftersom f är kontinuerlig och $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow -\infty$ antas alla värden från minimum och uppåt:

$$V_f = [-8e^{1/4}, \infty)$$



Kontrollerat mot facit. Lärarens figurtext skriver minimipunkten som $[-1, -8e^{1/4})$, ett skrivfel för $(-1, -8e^{1/4})$.

6. En sfärisk tank som töms

En tank har sfärisk form med radie $R = 6$ m. I botten av tanken sitter det en kran som vi kan tappa vatten ur tanken med, se figur.

Figuren i tentan: en sfär med radien R , delvis fylld med vatten till djupet h räknat från botten. Vattenvolymen är V . Under sfären sitter ett utloppsrör med en kran, där vattnet strömmar ut med hastigheten v .

När vattendjupet är h m så ges vattenvolymen i tanken V av

$$V = \frac{\pi h^2(3R - h)}{3} \text{ m}^3, \quad 0 \leq h \leq 2R,$$

och när kranen öppnas flödar vatten ut genom tanken med en hastighet v som är proportionell mot kvadratroten av vattenpelarens höjd, vilket ger att volymen ändras med en hastighet av

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi}{10} \sqrt{h} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Vi öppnar kranen och låter vattnet flöda ut.

(a) Med vilken hastighet ändras djupet h vid den tidpunkt då djupet är 2 m? (3p)

(b) Vid vilket djup h förändras djupet som långsammast? (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Relaterade hastigheter: derivera volymsambandet med avseende på tiden med kedjeregeln (Implicit derivering), och i (b) en **extremvärdesundersökning**.

Ledtråd 2

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$. Lös ut $h'(t)$ som en funktion av h och minimera sedan beloppet $u(h) = |h'|$ på $0 < h < 12$.

Ledtråd 3

$\frac{dV}{dh} = \pi(2Rh - h^2) = \pi h(12 - h)$, så $h' = -\frac{1}{10\sqrt{h}(12 - h)}$. u är minst där $\sqrt{h}(12 - h)$ är störst.

Lösning

(a) Både V och h beror av tiden. Kedjeregeln ger

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} (6Rh - 3h^2) \frac{dh}{dt} = \pi (2Rh - h^2) h'(t)$$

Med $\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi}{10}\sqrt{h}$ (negativ, eftersom vattnet rinner ut) och $R = 6$:

$$h'(t) = \frac{-\frac{\pi}{10}\sqrt{h}}{\pi(12h - h^2)} = -\frac{\sqrt{h}}{10h(12 - h)} = -\frac{1}{10\sqrt{h}(12 - h)}$$

Då $h = 2$ m:

$$h'(t_0) = -\frac{1}{10\sqrt{2} \cdot 10} = -\frac{1}{100\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{200} \text{ m/s}$$

djupet minskar med $\frac{\sqrt{2}}{200} \text{ m/s} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm/s} \approx 0,71 \text{ cm/s}$

(b) Djupets ändringshastighet har beloppet

$$u(h) = |h'(t)| = \frac{1}{10\sqrt{h}(12-h)}, \quad 0 < h < 12$$

När $h \rightarrow 0^+$ eller $h \rightarrow 12^-$ går nämnaren mot 0^+ , så $u(h) \rightarrow +\infty$. u är alltså minst där $g(h) = \sqrt{h}(12-h) = 12h^{1/2} - h^{3/2}$ är störst. Derivering:

$$g'(h) = 6h^{-1/2} - \frac{3}{2}h^{1/2} = \frac{3(4-h)}{2\sqrt{h}}$$

som är positiv för $0 < h < 4$ och negativ för $4 < h < 12$. Alltså har g sitt maximum och u sitt minimum i $h = 4$:

$$u(4) = \frac{1}{10 \cdot 2 \cdot 8} = \frac{1}{160} \text{ m/s} = \frac{5}{8} \text{ cm/s}$$

djupet ändras långsammast vid $h = 4 \text{ m}$ ($\frac{5}{8} \text{ cm/s}$)

Det stämmer med den allmänna formen $h = \frac{2R}{3}$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Derivata](#)
- [Deriveringsregler](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Polynom och faktorisering](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Implicit derivering](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)