

M0047M-2022-08-17

19 okt. 2026, 14 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2022-08-17 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_220817.pdf, m0047m_220817sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för en formel för $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k}$ och summans gränsvärde
- Uppgift 2: tre gränsvärden utan l'Hôpital, en exponentialkvot, $\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}$ och en logaritmkvot i oändligheten
- Uppgift 3: olikheterna $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ och gränsvärdet $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e$
- Uppgift 4: tangenter till $y = x^3 - 3x + 2$ genom en punkt utanför kurvan
- Uppgift 5: lokala extremvärden och värdemängd för $x^2 - 8|x| + 15$ på $[-7, 6]$, samt MATLAB-kod respektive derivatans definition
- Uppgift 6: avståndet till horisonten, implicit derivering och Taylorpolynom för att avgöra om vindkraftverk syns

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. En summaformel genom induktion

Det gäller att

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(a) Bevisa formeln ovan, exempelvis med induktion. (4p)

(b) Vad går summan

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k}$$

mot när n går mot oändligheten? (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett bevis med **induktion** för en **summa**, följt av ett standardgränsvärde.

Ledtråd 2

Kontrollera $n = 1$. Anta formeln för $n = p$ och skriv summan till $p + 1$ som summan till p plus termen $\frac{(p+1)^2}{2^{p+1}}$.

Ledtråd 3

Sätt allt på nämnaren 2^{p+1} : täljaren blir $2(p^2 + 4p + 6) - (p+1)^2$. Jämför med $(p+1)^2 + 4(p+1) + 6 = p^2 + 6p + 11$. I (b): $\frac{n^a}{2^n} \rightarrow 0$.

Lösning

(a) **Basfall.** För $n = 1$ är

$$VL = \frac{1^2}{2^1} = \frac{1}{2}, \quad HL = 6 - \frac{1+4+6}{2} = 6 - \frac{11}{2} = \frac{1}{2}$$

så formeln gäller.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för $n = p$ (induktionsantagandet):

$$\sum_{k=1}^p \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{p^2 + 4p + 6}{2^p}$$

Vi ska visa att den då gäller för $n = p + 1$, dvs. att summan är

$$6 - \frac{(p+1)^2 + 4(p+1) + 6}{2^{p+1}} = 6 - \frac{p^2 + 6p + 11}{2^{p+1}}$$

Med induktionsantagandet:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k^2}{2^k} &= \sum_{k=1}^p \frac{k^2}{2^k} + \frac{(p+1)^2}{2^{p+1}} = 6 - \frac{2(p^2 + 4p + 6)}{2^{p+1}} + \frac{p^2 + 2p + 1}{2^{p+1}} \\ &= 6 - \frac{2p^2 + 8p + 12 - p^2 - 2p - 1}{2^{p+1}} = 6 - \frac{p^2 + 6p + 11}{2^{p+1}} \end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n} \text{ för alla } n \geq 1}$$

(b) En exponentialfunktion med bas $2 > 1$ dominerar varje potens, så $\frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$ och $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$. Alltså

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 - \frac{n^2}{2^n} - \frac{4n}{2^n} - \frac{6}{2^n} \right) = \boxed{6}$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden utan l'Hôpital

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{1 - \cos t}}$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^{3x})}{e^{\ln(2x) + \ln(3x)}}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden som löses med algebraisk omskrivning, standardgränsvärden och räknelagar för exponentialfunktioner och logaritmer.

Ledtråd 2

(a) $e^{2x} = (e^x)^2$, så konjugatregeln fungerar. (b) Förläng med $\sqrt{1 + \cos t}$. (c) Bryt ut den dominerande termen e^{3x} i logaritmen och förenkla nämnaren med $e^{\ln a} = a$.

Ledtråd 3

(a) $\frac{e^x - 1}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$. (b) $\sqrt{1 - \cos^2 t} = |\sin t| = \sin t$ för små $t > 0$; använd $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$. (c) Uttrycket blir $\frac{3x + \ln(1 + e^{-x})}{6x^2}$.

Lösning

(a) Konjugatregeln ger, för $x \neq 0$,

$$\frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x - 1}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \frac{1}{e^x + 1} \rightarrow \frac{1}{1 + 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2}}$$

(b) För $0 < t < \pi$ är $\sin t > 0$. Förlängning med $\sqrt{1 + \cos t}$ ger

$$\frac{t}{\sqrt{1 - \cos t}} = \frac{t\sqrt{1 + \cos t}}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} = \frac{t\sqrt{1 + \cos t}}{|\sin t|} = \frac{\sqrt{1 + \cos t}}{\frac{\sin t}{t}}$$

Med standardgränsvärdet $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{1 - \cos t}} = \frac{\sqrt{1+1}}{1} = \sqrt{2}$$

Anmärkning: från vänster blir gränsvärdet $-\sqrt{2}$, eftersom $|\sin t| = -\sin t$ där. Därför frågar uppgiften bara efter högergränsvärdet.

(c) Förenkla täljare och nämnare för $x > 0$:

$$\ln(e^{2x} + e^{3x}) = \ln(e^{3x}(e^{-x} + 1)) = 3x + \ln(1 + e^{-x}), \quad e^{\ln(2x) + \ln(3x)} = 2x \cdot 3x = 6x^2$$

Alltså

$$\frac{3x + \ln(1 + e^{-x})}{6x^2} = \frac{\frac{3}{x} + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x^2}}{6} \rightarrow \frac{0 + 0}{6}$$

eftersom $\ln(1 + e^{-x}) \rightarrow \ln 1 = 0$. Därmed

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^{3x})}{e^{\ln(2x) + \ln(3x)}} = 0$$

Kontrollerat mot facit.

3. Olikheter för $\ln(1 + \frac{1}{x})$ och talet e

Antag $x > 0$.

(a) Visa olikheten

$$\frac{1}{x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}).$$

Ledning: Olikheten kan vara enklare att bevisa med variabelbytet $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$. (2p)

(b) På liknande sätt kan man visa (behövs ej) olikheten

$$\ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$$

Utnyttja denna olikhet tillsammans med olikheten i uppgift 4.(a) för att beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

(2p)

(c) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

(1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En olikhet som bevisas med **derivata** (en växande hjälpfunktion), följt av instängning av ett **gränsvärde** och kontinuitet hos e^x .

Ledtråd 2

Med $x = \frac{1}{t}$ blir olikheten $\ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$ för $t > 0$. Studera $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$ med $h(0) = 0$. I (b): multiplicera dubbelolikheten med $x > 0$.

Ledtråd 3

$$h'(t) = \frac{t}{(1+t)^2} > 0. \text{ (b) } \frac{x}{x+1} < x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1. \text{ (c) } \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1+1/x)}.$$

Lösning

(a) Med $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$, är $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{\frac{1}{t}+1} = \frac{t}{1+t}$ och $\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1+t)$. Olikheten är alltså ekvivalent med

$$\ln(1+t) > \frac{t}{1+t}, \quad t > 0$$

Låt $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$ för $t \geq 0$. Då är $h(0) = \ln 1 - 0 = 0$ och

$$h'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{(1+t) - t}{(1+t)^2} = \frac{(1+t) - 1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} > 0 \quad \text{för } t > 0$$

Alltså är h strängt växande på $[0, \infty)$, och $h(t) > h(0) = 0$ för $t > 0$. Därmed

$$\boxed{\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ för } x > 0}$$

Alternativt: **Medelvärdessatsen** för $\ln t$ på $[x, x+1]$ ger $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$ för något $c \in (x, x+1)$, och $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ ger båda olikheterna på en gång.

(b) Tillsammans ger olikheterna $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ för $x > 0$. Multiplikation med $x > 0$:

$$\frac{x}{x+1} < x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1$$

Här är $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1$ när $x \rightarrow \infty$, så instängningssatsen ger

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1}$$

(c) Skriv om med $a = e^{\ln a}$ och använd att exponentialfunktionen är kontinuerlig:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Kontrollerat mot facit. Tentan hänvisar i (b) till "uppgift 4.(a)", men det är olikheten i uppgift 3.(a) som avses (lärarens lösning skriver 3.(a)).

4. Tangenter genom en punkt utanför kurvan

Finn alla tangenter till kurvan

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

som går genom punkten $(1, -1)$. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Tangentens ekvation med **derivatan** som lutning, där tangeringspunkten är okänd.

Ledtråd 2

Kontrollera först om $(1, -1)$ ligger på kurvan. Låt tangeringspunkten vara $(a, f(a))$; tangenten är $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Kräv att den går genom $(1, -1)$.

Ledtråd 3

Villkoret blir $3a^2 - 2a^3 = 0$, dvs. $a^2(3 - 2a) = 0$.

Lösning

Punkten ligger inte på kurvan, eftersom $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \neq -1$. Låt tangeringspunkten vara $(a, f(a))$. Lutningen är $f'(a) = 3a^2 - 3$, och enpunktsformeln ger tangenten

$$y = a^3 - 3a + 2 + (3a^2 - 3)(x - a) = 3(a^2 - 1)x - 2a^3 + 2$$

Den går genom $(1, -1)$ om

$$-1 = 3(a^2 - 1) - 2a^3 + 2 \iff 3a^2 - 2a^3 = 0 \iff a^2(3 - 2a) = 0$$

dvs. $a = 0$ eller $a = \frac{3}{2}$.

- $a = 0$: $f(0) = 2$, $f'(0) = -3$, tangeringspunkt $(0, 2)$ och tangent $y = 2 - 3x$.
- $a = \frac{3}{2}$: $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{7}{8}$, $f'(\frac{3}{2}) = \frac{27}{4} - 3 = \frac{15}{4}$, tangeringspunkt $(\frac{3}{2}, \frac{7}{8})$ och tangent $y - \frac{7}{8} = \frac{15}{4}(x - \frac{3}{2})$, dvs. $y = \frac{15}{4}x - \frac{19}{4}$.

$$y = 2 - 3x \quad \text{och} \quad y = \frac{15x - 19}{4}$$

Kontroll: $2 - 3 \cdot 1 = -1$ och $\frac{15 - 19}{4} = -1$.

Kontrollerat mot facit.

5. Extremvärden för $x^2 - 8|x| + 15$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = x^2 - 8|x| + 15, \quad -7 \leq x \leq 6.$$

(a) Hitta alla lokala extremvärden till funktionen ovan. (3p)

(b) Ange funktionens värdemängd. (1p)

(c) **(M0047M)**: Beskriv med MATLAB-kommandon/kod hur vi kan finna globala extremvärden av denna funktion på intervallet $[-7, 6]$. (1p)

(c) **(M0029M/M0057M)**: Beräkna $f'(-2)$ med derivatans definition. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Extremvärden på ett slutet intervall: kandidaterna är ändpunkter, singulära punkter (där derivatan saknas) och kritiska punkter.

Ledtråd 2

Skriv f styckvis: $x^2 - 8x + 15$ för $x \geq 0$ och $x^2 + 8x + 15$ för $x < 0$. Eller kvadratkomplettera: $f(x) = (|x| - 4)^2 - 1$.

Ledtråd 3

Kandidaterna är $x = -7, -4, 0, 4$ och 6 . Jämför funktionsvärdena och derivatans tecken nära varje punkt.

Lösning

(a) Eftersom $|x|^2 = x^2$ är

$$f(x) = |x|^2 - 8|x| + 16 - 1 = (|x| - 4)^2 - 1$$

och styckvis

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 15, & 0 \leq x \leq 6, \\ x^2 + 8x + 15, & -7 \leq x < 0, \end{cases} \quad f'(x) = 2x - 8 \operatorname{sgn} x, \quad x \neq 0$$

- **Singulär punkt:** $x = 0$, där $f'(0^-) = 8$ och $f'(0^+) = -8$. Derivatan saknas, men f växer till vänster och avtar till höger.
- **Kritiska punkter:** $f'(x) = 0 \iff x = 4 \operatorname{sgn} x$, dvs. $x = \pm 4$.
- **Ändpunkter:** $x = -7$ och $x = 6$.

	-7	(-7, -4)	-4	(-4, 0)	0	(0, 6]
$f'(x)$		-	0	+	saknas	-
$f(x)$	8	↘	-1	↗	15	↘

$$\begin{aligned} \text{lok. max: } & f(-7) = 8, \quad f(0) = 15, \quad f(6) = 3 \\ \text{lok. min: } & f(-4) = f(4) = -1 \end{aligned}$$

(b) f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[-7, 6]$, så största och minsta värde antas, och de finns bland de lokala extremvärdena. Största värdet är $f(0) = 15$ och minsta $f(\pm 4) = -1$. Eftersom f är kontinuerlig antas alla mellanliggande värden:

$$V_f = [-1, 15]$$

(c) (M0047M) Exempelvis, efter lärarens kod:

```

1  xmin = -7; xmax = 6;
2  x = xmin:0.01:xmax;
3  f = @(x) x.^2 - 8*abs(x) + 15;
4  y = f(x);
5  [ymin, i] = min(y); [ymax, j] = max(y); % globala extremvärden i punktnätet
6  xminp = x(i); xmaxp = x(j);
7  plot(x, y, 'k', xminp, ymin, 'b*', xmaxp, ymax, 'r*')
8  xlabel('x'); ylabel('y');
9  legend('f(x)=x^2-8|x|+15', 'Globalt minimum', 'Globalt maximum')
```

Det viktiga är punktvisa operationer (`.^`), ett tätt punktnät över $[-7, 6]$ och att största och minsta värde tas fram (med `max/min` eller `fminbnd`) och markeras. Lärarens lösning använder `fminbnd(f,xmin,xmax)` för minimum och `fminbnd` på $-f$ för maximum. Observera att `fminbnd` bara hittar *ett* lokalt minimum, så med två minimipunkter (± 4) får man bara en av dem.

(c) (M0029M/M0057M) För h nära 0 (det räcker med $h < 2$) är $-2 + h < 0$, så $|-2 + h| = 2 - h$. Med $f(-2) = 4 - 16 + 15 = 3$:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2 + h)^2 - 8(2 - h) + 15 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 16 + 8h + 12}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) \\ &\quad \boxed{f'(-2) = 4} \end{aligned}$$

Kontroll: $f'(x) = 2x + 8$ för $x < 0$ ger $f'(-2) = 4$.

Kontrollerat mot facit. Lärarens MATLAB-kod anropar `axis([xmin,xmax,ymin,ymax])` utan att ha definierat `ymin` och `ymax`; koden ovan tar fram dem med `min/max` i stället.

6. Hur långt bort syns ett vindkraftverk?

Horisonten är den linje i synfältet där markytan och himlen möts, dvs den mest avlägsna punkten på markytan som man kan se. Om betraktarens ögon befinner sig på höjden h ges sambandet med avståndet d till horisonten implicit av ekvationen

$$d^2 = 2Rh + h^2,$$

där R är jordens radie, se nedanstående figur.

Figuren i tentan: en cirkelbåge (jordytan) med medelpunkt i jordens centrum. En vågrät linje tangerar bågen i horisontpunkten. Till vänster om tangeringspunkten ligger betraktarens ögon på höjden h över ytan, på avståndet d längs linjen; till höger ligger föremålets topp på avståndet x längs linjen och höjden y över ytan. Tre radier R går från centrum: till betraktaren, till tangeringspunkten och till föremålet.

Ett typiskt värde på d för en 2 m lång person som står vid havsnivå är $d = 5$ km. På motsvarande sätt kommer den personen att kunna se ett föremål som sticker upp y över havsytan på avståndet $d + x$, där

$$x^2 = 2Ry + y^2$$

(a) Antag $y = y(x)$. Beräkna $y(0)$, $y'(0)$ och $y''(0)$. (2p)

(b) Finn Taylorpolynomet $P_2(x)$ av ordning 2 kring $x = 0$ till funktionen $y = y(x)$. Felterm behöver ej beräknas. (2p)

(c) Antag att man skulle besluta sig för att sätta upp en skog av 330 meter höga vindkraftverk ute till havs, låt oss säga $x + d = 53$ km utanför Sandhamn i Stockholms skärgård. Använd $R = 6400$ km för jordradien, $d = 5$ km och Taylorpolynomet i uppgift (b) för att beräkna om vindkraftverken kommer att

synas över horisonten när man tittar ut mot havet från Sandhamn. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Implicit derivering två gånger och sedan Taylorpolynom av ordning 2.

Ledtråd 2

Derivera $x^2 = 2Ry + y^2$ med avseende på x två gånger och sätt in $x = 0$ steg för steg.

$$P_2(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2.$$

Ledtråd 3

$$2x = 2Ry' + 2yy' \text{ och } 2 = 2Ry'' + 2(y')^2 + 2yy''. \text{ I (c) är } x = 53 - 5 = 48 \text{ km.}$$

Lösning

(a) Sambandet kommer från Pythagoras sats: $x^2 + R^2 = (R + y)^2$. Två implicita deriveringar med avseende på x ger

$$2x = 2Ry' + 2yy', \quad 2 = 2Ry'' + 2(y')^2 + 2yy''$$

Med $x = 0$ insatt, i tur och ordning (och $y \geq 0$ eftersom y är en höjd):

$$\begin{aligned} 0 &= 2Ry(0) + y(0)^2 = y(0)(2R + y(0)) && \implies y(0) = 0 \\ 0 &= 2Ry'(0) + 2y(0)y'(0) = 2Ry'(0) && \implies y'(0) = 0 \\ 2 &= 2Ry''(0) + 2y'(0)^2 + 2y(0)y''(0) = 2Ry''(0) && \implies y''(0) = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

$$\boxed{y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = \frac{1}{R}}$$

(b)

$$P_2(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 = \boxed{\frac{x^2}{2R}}$$

(c) Med $x = 53 - 5 = 48$ km och $R = 6400$ km:

$$y \approx P_2(48) = \frac{48^2}{2 \cdot 6400} = \frac{2304}{12800} = 0,18 \text{ km} = 180 \text{ m}$$

De nedersta 180 m av vindkraftverken skymms alltså av horisonten, men de är 330 m höga:

vindkraftverken syns; de översta $330 - 180 = 150 \text{ m}$ sticker upp över horisonten

Den exakta lösningen $y = \sqrt{R^2 + x^2} - R$ ger $y \approx 179,997 \text{ m}$, så approximationen är mycket god. Atmosfärisk refraktion är försummad.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
 - [Matematisk induktion](#)
 - [Talföljder och summor](#)
 - [Gränsvärden](#)
 - [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
 - [Derivata](#)
 - [Medelvårdessatsen](#)
 - [Extremvärden](#)
 - [Implicit derivering](#)
 - [Tylors formel](#)
-