

M0047M-2022-05-24

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2022-05-24 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_220524.pdf, m0047m_220524sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: binomialutveckling av $(2+t)^5 - (2-t)^5$, ett gränsvärde och olikheten $(1 + \frac{1}{n})^n > 2$
- Uppgift 2: tre gränsvärden: $x^{1/\ln x}$, en rot differens och $\frac{x^{20} - 1}{x^{10} - 1}$
- Uppgift 3: derivatan av $\arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ och identiteten med $\arcsin x$
- Uppgift 4: inverterbarhet och inversens derivata för $x + x^3$, samt ett ekvationssystem
- Uppgift 5: extremvärden, asymptoter och värdemängd för $x^2 e^{-(x-1)^2/2}$
- Uppgift 6: optimering, var en bro över en flod ska ligga för kortast väg

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Binomialsatsen och en olikhet

(a) Binomialutveckla

$$(2+t)^5 - (2-t)^5$$

så långt det går. (3p)

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2+t)^5 - (2-t)^5}{t}.$$

(1p)

(c) Utnyttja binomialsatsen för att visa att

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$$

för $n = 2, 3, 4, \dots$ **Ledning:** behöver man undersöka alla termer i utvecklingen? (1p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1Binomialsatsen med **binomialkoefficienter**, följt av ett enkelt **gränsvärde**. **Ledtråd 2** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. I $(2-t)^5$ byter de udda potenserna av t tecken. **Ledtråd 3**(a) De jämna potenserna tar ut varandra och de udda dubblas. (c) Med $a = 1, b = \frac{1}{n}$ är de två första termerna $1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$, och alla övriga termer är positiva. **Lösning****(a)** Binomialkoefficienterna för $n = 5$ är 1, 5, 10, 10, 5, 1, så

$$(2+t)^5 = 32 + 5 \cdot 16t + 10 \cdot 8t^2 + 10 \cdot 4t^3 + 5 \cdot 2t^4 + t^5 = 32 + 80t + 80t^2 + 40t^3 + 10t^4 + t^5$$

och på samma sätt, där de udda potenserna av t får minustecken,

$$(2-t)^5 = 32 - 80t + 80t^2 - 40t^3 + 10t^4 - t^5$$

Differensen blir

$$(2+t)^5 - (2-t)^5 = 160t + 80t^3 + 2t^5$$

(b) Med (a):

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{160t + 80t^3 + 2t^5}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (160 + 80t^2 + 2t^4) = \boxed{160}$$

Alternativt: kvoten är två gånger lutningen för sekanten till $y = x^5$ mellan $x = 2 - t$ och $x = 2 + t$, som går mot $2 \cdot 5 \cdot 2^4 = 160$.

(c) Binomialsatsen med $a = 1$ och $b = \frac{1}{n}$ ger

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^n}$$

De två första termerna är $1 + 1 = 2$. För $n \geq 2$ finns minst en term till, och alla termer är positiva, så

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 \text{ för } n \geq 2}$$

Man behöver alltså inte undersöka alla termer, bara konstatera att de är positiva.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \sin x} - \sqrt{x^2 - \sin x}$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 1}{x^{10} - 1}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1

Gränsvärden där uttrycket först måste skrivas om: med **logaritmer**, med rotkonjugat och med **faktorisering**.

 Ledtråd 2

(a) Skriv $f(x) = e^{\ln f(x)}$. (b) Förläng med $\sqrt{x^2 + \sin x} + \sqrt{x^2 - \sin x}$. (c) Konjugatregeln med $x^{20} = (x^{10})^2$.

 Ledtråd 3

(a) $\ln x^{1/\ln x} = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln x = 1$. (b) Täljaren blir $2 \sin x$, som är begränsad, medan nämnaren växer som $2x$. (c) $x^{20} - 1 = (x^{10} + 1)(x^{10} - 1)$.

 Lösning

(a) För $0 < x < 1$ är

$$\ln x^{1/\ln x} = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln x = 1 \quad \implies \quad x^{1/\ln x} = e^1 = e$$

Funktionen är konstant lika med e , så

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x} = e}$$

(b) Gränsvärdet är av typen $[\infty - \infty]$. Förläng med rotkonjugatet:

$$\sqrt{x^2 + \sin x} - \sqrt{x^2 - \sin x} = \frac{(x^2 + \sin x) - (x^2 - \sin x)}{\sqrt{x^2 + \sin x} + \sqrt{x^2 - \sin x}} = \frac{2 \sin x}{\sqrt{x^2 + \sin x} + \sqrt{x^2 - \sin x}}$$

För $x > 0$ är $\sqrt{x^2} = x$, så efter division med x i täljare och nämnare:

$$= \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{\sin x}{x^2}}} \rightarrow \frac{2 \cdot 0}{1 + 1} = 0$$

eftersom $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$ och $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Alltså

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + \sin x} - \sqrt{x^2 - \sin x}) = 0$$

(c) Konjugatregeln ger, för $x \neq 1$,

$$\frac{x^{20} - 1}{x^{10} - 1} = \frac{(x^{10} + 1)(x^{10} - 1)}{x^{10} - 1} = x^{10} + 1$$

så

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 1}{x^{10} - 1} = 1^{10} + 1 = 2$$

Kontrollerat mot facit.

3. En arcusidentitet via derivatan

Definiera

$$f(x) = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < x \leq 1.$$

(a) Förenkla $f'(x)$ så långt det går. (2p)

(b) Visa att för $0 < x \leq 1$ så är

$$\arcsin x + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

(2p)

(c) Vad är

$$\arcsin x + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

om $-1 \leq x < 0$? (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Derivering av **Arcusfunktioner** med kedjeregeln (**Deriveringsregler**), och sedan att en funktion med derivatan noll på ett intervall är konstant där (**Medelvärdessatsen**).

Ledtråd 2

$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{u'}{1+u^2}$ och $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Bestäm konstanten genom att sätta in en lämplig punkt.

Ledtråd 3

$1 + \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ och $\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. Välj $x = 1$ i (b) och $x = -1$ i (c).

Lösning

(a) Med $u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ger kvotregeln

$$u' = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{-x^2 - (1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

och $1 + u^2 = 1 + \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$. Alltså är, för $0 < x < 1$,

$$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2} = x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

(b) Låt $g(x) = \arcsin x + f(x)$. Enligt (a) är

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad 0 < x < 1$$

så g är konstant på $(0, 1)$ enligt medelvärdessatsen. Eftersom g är kontinuerlig på $(0, 1]$ har den samma konstanta värde i $x = 1$:

$$g(1) = \arcsin 1 + \arctan \frac{0}{1} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Alltså

$$\arcsin x + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < x \leq 1$$

Alternativt: i en rätvinklig triangel med hypotenusan 1 och kateterna x och $\sqrt{1-x^2}$ är de två spetsiga vinklarna $\arcsin x$ och $\arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, och de har summan $\frac{\pi}{2}$.

(c) Samma derivering gäller för $-1 < x < 0$ (uträkningen i (a) använder inte att $x > 0$), så funktionen är konstant på $[-1, 0)$ av samma skäl. Med $x = -1$:

$$\arcsin(-1) + \arctan \frac{0}{-1} = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x + \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x < 0$$

Förklaringen är att $\arctan u$ är udda medan $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ byter tecken med x : hela uttrycket är en udda funktion.

Kontrollerat mot facit.

4. Inversen till $x + x^3$

Låt

$$f(x) = x + x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att funktionen är inverterbar. (1p)

(b) Beräkna

$$(f^{-1})'(-2).$$

(3p)

(c) Finn samtliga par av lösningar (x, y) till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + x^3 = y + y^3, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Inverterbarhet via monotonitet, och Inversa funktioners derivata.

Ledtråd 2

En strängt växande funktion är injektiv. För inversen gäller $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(b)}$ där $f(b) = a$.

Ledtråd 3

$f'(x) = 1 + 3x^2 > 0$. Lös $y + y^3 = -2$ genom att gissa en heltalsrot. (c) Första ekvationen säger $f(x) = f(y)$.

Lösning

(a) $f'(x) = 1 + 3x^2 \geq 1 > 0$ för alla x , så f är strängt växande på $\mathbb{R}$ och därmed injektiv:

f är inverterbar

(b) Först $f^{-1}(-2)$: vi söker y med $y + y^3 = -2$, dvs. $y^3 + y + 2 = 0$. Man ser att $y = -1$ är en rot, och eftersom f är injektiv är den den enda. Alltså $f^{-1}(-2) = -1$.

Med $y = f^{-1}(x)$ är $x = f(y) = y + y^3$. Implicit derivering med avseende på x ger

$$1 = (1 + 3y^2)y' \iff y' = \frac{1}{1 + 3y^2}$$

I punkten $x = -2$, där $y = -1$:

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{1 + 3 \cdot (-1)^2} = \frac{1}{4}$$

(c) Första ekvationen är $f(x) = f(y)$. Eftersom f är injektiv ger det $x = y$, och andra ekvationen ger då $2x = 14$:

$(x, y) = (7, 7)$ är den enda lösningen

Alternativt: $x + x^3 - y - y^3 = (x - y)(1 + x^2 + xy + y^2)$, och $1 + x^2 + xy + y^2 = 1 + (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$, så $x = y$.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $x^2 e^{-(x-1)^2/2}$

Betrakta funktionen

$$y = f(x) = x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. Andraderivatan behöver ej beaktas. (4p)

(b) Ange funktionens värdemängd. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: gränsvärden i $\pm\infty$ (Oegentliga gränsvärden) och teckenschema för derivatan.

Ledtråd 2

Funktionen är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så bara vågräta asymptoter är möjliga. Exponentialfunktionen dominerar över potensfunktionen. Derivera med produktregeln och bryt ut exponentialfaktorn.

Ledtråd 3

$$f'(x) = -x(x+1)(x-2)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

 Lösning

Asymptoter. $f(x) > 0$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$. f är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så lodräta asymptoter saknas. Med $t = \frac{(x-1)^2}{2}$, dvs. $x = 1 \pm \sqrt{2t}$, där $t \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{e^{(x-1)^2/2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 \pm \sqrt{2t})^2}{e^t} = 0$$

eftersom exponentialfunktionen växer snabbare än varje potensfunktion. Alltså

$$y = 0 \text{ är vågrät asymptot då } x \rightarrow \pm\infty$$

Derivata. Produktregeln ger

$$f'(x) = 2xe^{-\frac{(x-1)^2}{2}} - x^2(x-1)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} = -x(x^2 - x - 2)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} = -x(x+1)(x-2)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

Kritiska punkter: $x = -1$, $x = 0$ och $x = 2$.

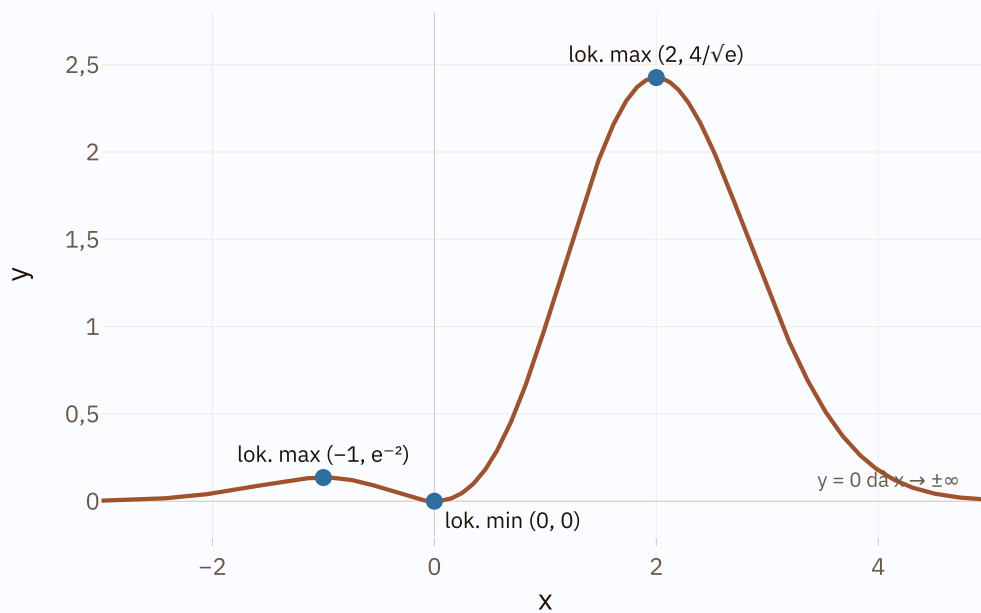
	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2
$-x$	+	+	+	0	-	-
$x+1$	-	0	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0
$e^{-(x-1)^2/2}$	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗	lok. max

$$\text{lok. max } f(-1) = e^{-2} \approx 0,135, \quad \text{lok. min } f(0) = 0, \quad \text{lok. max } f(2) = \frac{4}{\sqrt{e}} \approx 2,43$$

Skiss. Kurvan startar nära x -axeln långt till vänster, stiger till en liten topp i $(-1, e^{-2})$, sjunker till $(0, 0)$ där den tangerar x -axeln, stiger till den stora toppen $(2, \frac{4}{\sqrt{e}})$ och avtar sedan mot 0 igen.

(b) f är kontinuerlig och $f \geq 0$ med $f(0) = 0$, så minsta värdet är 0. Eftersom $f \rightarrow 0$ i båda ändarna är största värdet det största av de lokala maxima. $\frac{4}{\sqrt{e}} > 1 > e^{-2}$, så det största värdet är $f(2) = \frac{4}{\sqrt{e}}$. Enligt satsen om mellanliggande värden antas alla värden däremellan:

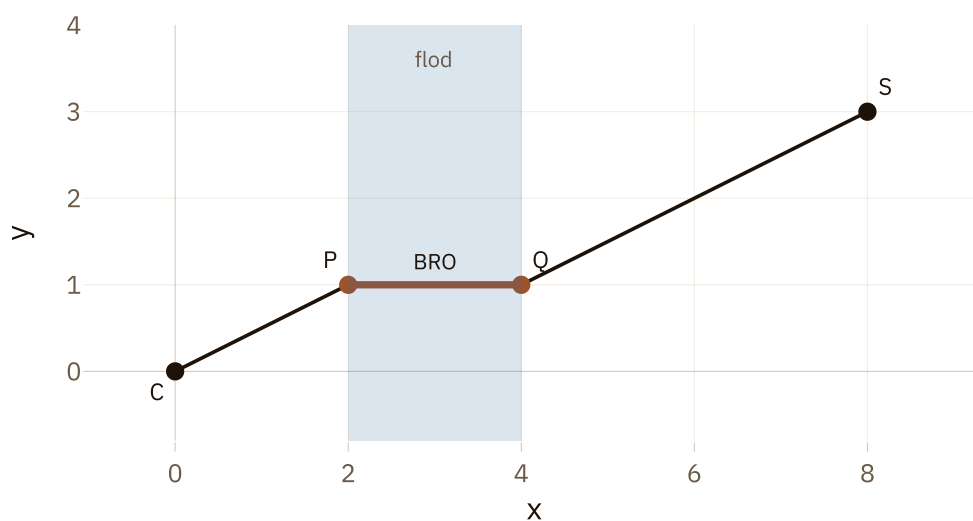
$$V_f = [0, \frac{4}{\sqrt{e}}]$$



Kontrollerat mot facit.

6. Bron över floden

Chad och Stacy bor på var sin sida om en lång rak flod som löper i nord-sydlig riktning. Om vi lägger ett koordinatsystem med Chads hus i origo så ligger Stacys hus i punkten $(8, 3)$ och floden upptar området där $2 \leq x \leq 4$. En dag bestämmer sig Chad för att bygga en rakt öst-västlig bro över floden och förbinda den med två raka vägar mellan sitt hus och Stacys hus, se nedanstående figur.



Figuren är omritad efter originalet, här med bron vid $y = 1$.

På vilken y -koordinat bör Chad förlägga bron för att totala vägen mellan dem skall bli så kort som möjligt och hur lång blir totala vägen mellan dem då? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Optimering: sök **minsta värdet** av en funktion på ett slutet intervall.

Ledtråd 2

Med bron mellan $P = (2, y)$ och $Q = (4, y)$ är totala vägen $d(y) = \sqrt{2^2 + y^2} + 2 + \sqrt{4^2 + (3 - y)^2}$. Jämför kritiska punkter och ändpunkterna $y = 0$ och $y = 3$.

Ledtråd 3

$d'(y) = 0$ ger $\frac{y}{\sqrt{4 + y^2}} = \frac{3 - y}{\sqrt{16 + (3 - y)^2}}$. Kvadrera och förenkla till $16y^2 = 4(3 - y)^2$.

Lösning

Med bron mellan $P = (2, y)$ och $Q = (4, y)$ blir totala vägen

$$d(y) = |CP| + |PQ| + |QS| = \sqrt{2^2 + y^2} + 2 + \sqrt{4^2 + (3 - y)^2}$$

Det räcker att söka i $0 \leq y \leq 3$: för $y < 0$ är båda rotuttrycken större än för $y = 0$, och för $y > 3$ större än för $y = 3$.

Ändpunkter.

$$d(0) = 2 + 2 + \sqrt{16 + 9} = 9, \quad d(3) = \sqrt{13} + 2 + 4 = 6 + \sqrt{13} \approx 9,61$$

Kritiska punkter. d är deriverbar överallt och

$$d'(y) = \frac{y}{\sqrt{4 + y^2}} - \frac{3 - y}{\sqrt{16 + (3 - y)^2}}$$

$d'(y) = 0$ med $0 \leq y \leq 3$ (båda leden icke-negativa) ger efter kvadrering

$$y^2(16 + (3 - y)^2) = (4 + y^2)(3 - y)^2 \iff 16y^2 = 4(3 - y)^2 \iff 4y = \pm 2(3 - y)$$

dvs. $y = 1$ eller $y = -3$, där den senare förkastas. I $y = 1$:

$$d(1) = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{20} = 2 + 3\sqrt{5} \approx 8,71$$

Eftersom $2 + 3\sqrt{5} = 2 + \sqrt{45} < 2 + \sqrt{49} = 9 = d(0) < d(3)$ är detta minimum:

bron på $y = 1$, total väglängd $2 + 3\sqrt{5} \approx 8,71$
--

Alternativt: brons längd är alltid 2, så man kan "klippa bort" floden och flytta S två steg åt vänster till $(6, 3)$. Kortaste vägen från origo till $(6, 3)$ är den rätta linjen $y = \frac{x}{2}$, som ger $y = 1$ vid $x = 2$ och längden $\sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$; plus bron blir det $2 + 3\sqrt{5}$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Binomialkoefficient](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Polynom och faktorisering](#)
- [Arcusfunktioner](#)
- [Deriveringsregler](#)
- [Medelvärdessatsen](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Inversa funktioners derivata](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)