

M0047M-2022-03-24

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2022-03-24 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_220324.pdf, m0047m_220324sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för formeln för n :te derivatan av $\ln x$
- Uppgift 2: tre gränsvärden, $e^x \sin e^{-x}$ då $x \rightarrow \infty$, $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$ med Taylor och $\frac{x^3 - 8}{x - 2}$
- Uppgift 3: medelvärdessatsen för $1/x$ på $(2, 3)$ och triangeln som tangenten avgränsar mot koordinataxlarna
- Uppgift 4: $\tanh x$ är injektiv, dess invers och inversens definitionsmängd
- Uppgift 5: extremvärden, asymptoter och globala extremvärden för $\arctan x + \frac{1-x}{1+x^2}$
- Uppgift 6: största volymförhållandet för en cylinder inskriven i ett klot

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Högre derivator av $\ln x$ genom induktion

Bevisa med induktion att det för $x > 0$ och alla heltal $n = 1, 2, 3, \dots$ gäller att

$$\frac{d^n}{dx^n}(\ln x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

(5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett bevis med **induktion** där induktionssteget är en **derivering**.

Ledtråd 2

Basfallet är $n = 1$ (kom ihåg att $0! = 1$). Anta att formeln gäller för $n = p$ och derivera en gång till för att få fallet $n = p + 1$.

Ledtråd 3

Skriv induktionsantagandet som $(-1)^{p-1}(p-1)! \cdot x^{-p}$ och använd $\frac{d}{dx}x^{-p} = -p x^{-p-1}$. Sedan är $(p-1)! \cdot p = p!$.

Lösning

Basfall. För $n = 1$ är

$$VL = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad HL = (-1)^0 \frac{0!}{x^1} = \frac{1}{x}$$

eftersom $0! = 1$. Formeln gäller alltså för $n = 1$.

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $p \geq 1$ (induktionsantagandet):

$$\frac{d^p}{dx^p}(\ln x) = (-1)^{p-1}(p-1)! \cdot x^{-p}$$

Vi ska visa att $\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(\ln x) = (-1)^p \frac{p!}{x^{p+1}}$. Med induktionsantagandet får vi

$$\begin{aligned} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(\ln x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^p}{dx^p}(\ln x) \right) = \frac{d}{dx} \left((-1)^{p-1}(p-1)! \cdot x^{-p} \right) \\ &= (-1)^{p-1}(p-1)! \cdot (-p) x^{-p-1} = (-1)^p ((p-1)! \cdot p) x^{-(p+1)} = (-1)^p \frac{p!}{x^{p+1}} \end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$.

Enligt induktionsprincipen gäller

$$\frac{d^n}{dx^n}(\ln x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \text{ för alla heltal } n \geq 1, x > 0$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avge huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin e^{-x}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

Ledning: Taylor. (2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden av typen $\infty \cdot 0$ och $\left[\frac{0}{0}\right]$: (a) standardgränsvärdet för $\frac{\sin t}{t}$, (b) Taylorutveckling, (c) faktorisering.

Ledtråd 2

(a) Byt variabel $t = e^{-x}$. (b) Utveckla $e^x - e^{-x}$ kring 0 till ordning 1 med restterm. (c) $x = 2$ är ett nollställe till täljaren, så $x - 2$ är en faktor.

Ledtråd 3

(a) $t \rightarrow 0^+$ då $x \rightarrow \infty$, och uttrycket blir $\frac{\sin t}{t}$. (b) $e^x - e^{-x} = 2x + x^2 B(x)$ med B begränsad nära 0. (c) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

Lösning

(a) Gränsvärdet är av typen $\infty \cdot 0$. Med $t = e^{-x}$ går $t \rightarrow 0^+$ då $x \rightarrow \infty$, och

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin e^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = \boxed{1}$$

(b) Gränsvärdet är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Låt $f(x) = e^x - e^{-x}$. Då är

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = e^x + e^{-x}, \quad f'(0) = 2, \quad f''(x) = e^x - e^{-x}$$

Taylor's formel av ordning 1 kring 0 ger

$$f(x) = 0 + 2x + \frac{f''(c)}{2!}x^2 = 2x + x^2 B(x)$$

för något c mellan 0 och x , där $B(x) = \frac{e^c - e^{-c}}{2}$ är begränsad nära 0 eftersom $|B(x)| \leq \frac{e^{|c|} + e^{|c|}}{2} \leq e^{|x|}$. Alltså är

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 B(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + x B(x)) = \boxed{2}$$

(c) Gränsvärdet är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Eftersom $x = 2$ är ett nollställe till täljaren kan den faktoriseras, och polynomdivision ger

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Alltså är

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 4 + 4 + 4 = \boxed{12}$$

Alternativt: uttrycket är en differenskvot för x^3 i $x = 2$, så gränsvärdet är $\left. \frac{d}{dx} x^3 \right|_{x=2} = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Kontrollerat mot facit.

3. Medelvärdessatsen och tangenttrianglar för $1/x$

Låt

$$y = f(x) = 1/x, \quad x > 0.$$

(a) Illustrera medelvärdessatsen genom att finna en punkt i det öppna intervallet $(2, 3)$ i vilken tangenten till kurvan $y = f(x)$ är parallell med kordan som sammanbinder punkterna $(2, f(2))$ och $(3, f(3))$. (2p)

(b) Visa att arean av triangeln som begränsas av tangenten till f och koordinataxlarna är konstant, oberoende av tangeringspunkt. Vad blir arean? **Ledning:** finn först tangenten till f i någon godtycklig punkt $x = a$ på kurvan och finn därefter ett uttryck för arean av triangeln. (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är **Medelvärdessatsen**; (b) är en tangentuppgift med **derivatan** som lutning.

Ledtråd 2

(a) Lös $f'(c) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$ för $c \in (2, 3)$. (b) Tangenten i $(a, \frac{1}{a})$ har lutningen $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$; bestäm var den skär axlarna.

Ledtråd 3

(a) Kordans lutning är $-\frac{1}{6}$. (b) Tangenten är $y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$.

Lösning

(a) f är kontinuerlig på $[2, 3]$ och deriverbar på $(2, 3)$, med $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Kordans lutning är

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Villkoret $f'(c) = -\frac{1}{6}$ ger

$$-\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{6} \iff c^2 = 6 \iff c = \pm\sqrt{6}$$

Den negativa roten ligger inte i intervallet, men $2 = \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$, så

$$c = \sqrt{6} \approx 2,449$$

I punkten $(\sqrt{6}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ är tangenten parallell med kordan.

Anmärkning: allmänt ger samma räkning på $[a, b]$ med $0 < a < b$ att $c^2 = ab$, dvs. $c = \sqrt{ab}$, det geometriska medelvärde av a och b .

(b) Tangeringspunkten är $(a, \frac{1}{a})$ med $a > 0$, och tangentens lutning är $k = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Enpunktsformeln ger

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \iff y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

Tangenten skär y -axeln ($x = 0$) i $y_0 = \frac{2}{a}$ och x -axeln ($y = 0$) i $x_0 = 2a$. Båda är positiva, så triangeln med hörn i origo, $(x_0, 0)$ och $(0, y_0)$ har arean

$$T = \frac{x_0 y_0}{2} = \frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = \boxed{2 \text{ a.e.}}$$

oberoende av a .

Kontrollerat mot facit.

4. Tangens hyperbolicus och dess invers

Vi definierar funktionen *tangens hyperbolicus* som

$$f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att f är injektiv (1 – 1). (2p)

(b) Bestäm inversen till denna funktion. (2p)

(c) Bestäm inversens definitionsmängd. Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Hyperboliska funktioner och invers funktion: injektivitet, invers och värdemängd.

Ledtråd 2

(a) Visa att $f'(x) > 0$, så att f är strängt växande. (b) Lös $x = f(y)$ för y med hjälpvariabeln $t = e^y > 0$. (c) Inversens definitionsmängd är f 's värdemängd.

Ledtråd 3

(a) $f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$. (b) $x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ ger $t^2 = \frac{1 + x}{1 - x}$. (c) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

Lösning

(a) Med kvotregeln och $(e^x + e^{-x})' = e^x - e^{-x}$, $(e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x}$:

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^4} = \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^4} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Alltså är $f'(x) > 0$ för alla x , så f är strängt växande på $\mathbb{R}$. Två olika x ger därför olika funktionsvärden:

f är injektiv

(b) Vi söker $y = f^{-1}(x)$, dvs. löser $x = f(y)$ för y . Med $t = e^y > 0$ är

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

Då är

$$x(t^2 + 1) = t^2 - 1 \iff x + 1 = t^2(1 - x) \iff t^2 = \frac{1 + x}{1 - x}$$

Eftersom $t = e^y > 0$ är $t = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$, och

$$f^{-1}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Inversen kallas *area tangens hyperbolicus*, $\operatorname{artanh} x$.

(c) $D(f^{-1}) = V(f)$. f är kontinuerlig och strängt växande, och

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

Eftersom f är strängt växande antas inte gränsvärdena ± 1 , men alla värden däremellan antas (satsen om mellanliggande värden). Alltså

$$D(f^{-1}) = V(f) = (-1, 1)$$

vilket stämmer med att $\frac{1+x}{1-x} > 0$ precis då $-1 < x < 1$.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $\operatorname{arctan} x + \frac{1-x}{1+x^2}$

Betrakta funktionen

$$y = \operatorname{arctan}(x) + \frac{1-x}{1+x^2}.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. Andraderivatan behöver ej beaktas. (4p)

(b) Avgör om f har något globalt maximum eller globalt minimum och om så är fallet, bestäm dessa. (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning med teckenschema för derivatan; arctan ger horisontella asymptoter (Arcusfunktioner).

Ledtråd 2

Beräkna $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ (nämnaren $1 + x^2$ blir aldrig noll, så inga lodräta asymptoter).
Derivera och sätt på gemensamt bråkstreck.

Ledtråd 3

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)}{(1+x^2)^2}. \text{ För (b): jämför de lokala extremvärdena med asymptoternas värden } \pm \frac{\pi}{2}.$$

Lösning

Asymptoter. $1 + x^2 \geq 1 > 0$, så f är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbf{R}$ och saknar lodräta asymptoter. Vidare är

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = 0$$

så

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{horisontella asymptoter } y = \frac{\pi}{2} \text{ då } x \rightarrow \infty \text{ och } y = -\frac{\pi}{2} \text{ då } x \rightarrow -\infty$$

Sneda asymptoter saknas, eftersom gränsvärdena är ändliga.

Derivata.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-(1+x^2) - (1-x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2) - 1 - x^2 - 2x + 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(x-1)}{(1+x^2)^2}$$

Kritiska punkter: $x = 0$ och $x = 1$.

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$2x$	-	0	+	+	+

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$x - 1$	-	-	-	0	+
$(1 + x^2)^2$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

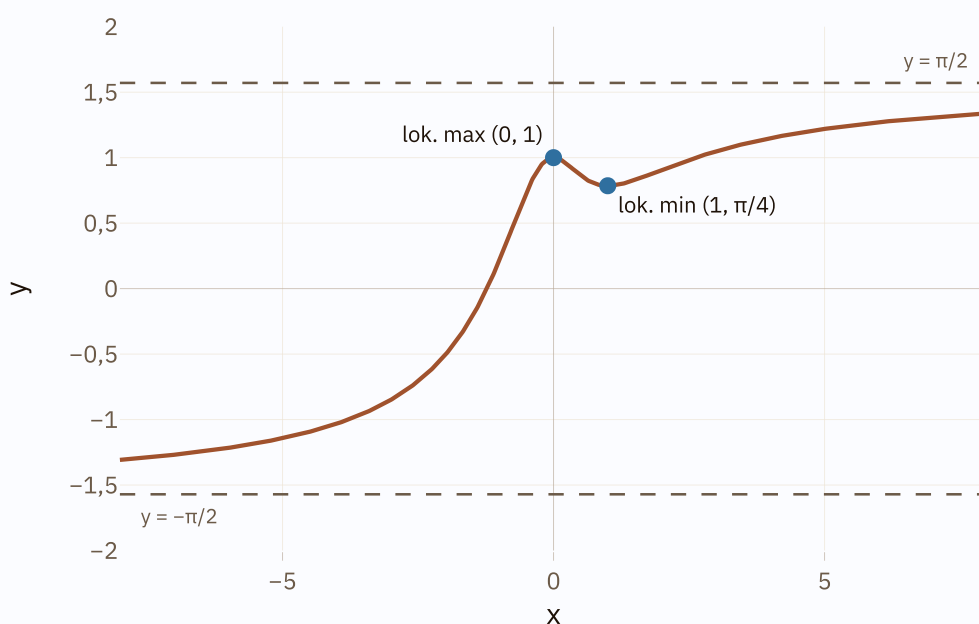
$$\text{lok. max } f(0) = 1, \quad \text{lok. min } f(1) = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$$

Skiss. Kurvan kommer in från asymptoten $y = -\frac{\pi}{2}$ till vänster och växer. Eftersom $f(-1) = -\frac{\pi}{4} + 1 = \frac{4 - \pi}{4} > 0$ skär den x -axeln en gång, något till vänster om $x = -1$ (numeriskt $x \approx -1,23$).

Den når maximum $(0, 1)$ (skärningen med y -axeln), sjunker till minimum $(1, \frac{\pi}{4}) \approx (1; 0,785)$ och växer sedan mot asymptoten $y = \frac{\pi}{2}$ underifrån.

(b) f är växande på $(-\infty, 0]$ och $[1, \infty)$ och avtagande på $[0, 1]$. Värdena närmar sig $\frac{\pi}{2} > 1 = f(0)$ då $x \rightarrow \infty$ och $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} = f(1)$ då $x \rightarrow -\infty$, men antas aldrig. Värdeområdet är alltså $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, och

f saknar både globalt maximum och globalt minimum



Kontrollerat mot facit.

6. Största cylinder i ett klot

En rak cirkulär cylinder är inskriven i ett klot, se figuren nedan.

Figuren i tentan: ett klot med radien R och en inskriven rak cirkulär cylinder med radien r och höjden h . Radien R är dragen från klotets medelpunkt till en punkt på cylinderns övre kant, så r , $\frac{h}{2}$ och R bildar en rätvinklig triangel.

Bestäm det största värde som förhållandet V_c/V_b mellan cylinderns volym V_c och klotets volym V_b kan anta. Ange cylinderns radie r och höjd h (uttryckta i klotets radie R) som ger maximum för detta förhållande. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ett optimeringsproblem: **största värde** av en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall.

Ledtråd 2

$V_c = \pi r^2 h$, $V_b = \frac{4\pi R^3}{3}$ och Pythagoras ger $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$. Skriv förhållandet som en funktion av h på $[0, 2R]$.

Ledtråd 3

$$\frac{V_c}{V_b} = \frac{3}{16R^3}(4R^2h - h^3); \text{ derivatan är noll då } 3h^2 = 4R^2.$$

Lösning

Cylindern har volymen $V_c = \pi r^2 h$ och klotet $V_b = \frac{4\pi R^3}{3}$. Ur figuren (Pythagoras):

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \iff r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}, \quad 0 \leq h \leq 2R$$

Förhållandet som funktion av h blir

$$f(h) = \frac{V_c}{V_b} = \frac{\pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3}{16R^3} (4R^2h - h^3)$$

f är kontinuerlig på det slutna, begränsade intervallet $[0, 2R]$, så största värde finns. I ändpunkterna är $f(0) = 0$ och $f(2R) = \frac{3}{16R^3}(8R^3 - 8R^3) = 0$.

Derivata.

$$f'(h) = \frac{3}{16R^3} (4R^2 - 3h^2) = 0 \iff h^2 = \frac{4R^2}{3} \iff h = \pm \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Bara $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ ligger i intervallet. Där är

$$f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{16R^3} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} \left(4R^2 - \frac{4R^2}{3}\right) = \frac{3}{16R^3} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8R^2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Detta är större än ändpunktsvärdena 0, så det är maximum. (Även $f''(h) = -\frac{9h}{8R^3} < 0$ för $h > 0$ bekräftar det.) Motsvarande radie är

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} R$$

$$\boxed{\max \frac{V_c}{V_b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577 \quad \text{för} \quad h = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}} R}$$

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Derivata](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Gränsvärdesberäkning med Taylor](#)
- [Polynom och faktorisering](#)
- [Medelvärdessatsen](#)
- [Hyperboliska funktioner](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Arcusfunktioner](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)

