

M0047M-2021-12-21

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2021-12-21 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_211221.pdf, m0047m_211221sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: en olikhet och induktionsbevis för $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- Uppgift 2: gränsvärdena för $\frac{n!}{n^n}$, ett uttryck med $\sqrt{t^2}$ och en rationell funktion
- Uppgift 3: när $\arcsin rx$ och $\arccos rx$ skär varandra under rät vinkel
- Uppgift 4: tangent till kruciform-kurvan $4x^2y^2 = 9x^2 + 9y^2$ och arean av en triangel
- Uppgift 5: extremvärden, asymptoter och värdemängd för $x^{1/x}$, och jämförelse av $\sqrt[3]{3}$ och $\sqrt[4]{4}$
- Uppgift 6: relaterade hastigheter, vattendjupet i en halvsfärisk tank

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. En olikhet och en summa genom induktion

(a) Antag att $t > 0$. Visa olikheten

$$2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{(t+1)^2} < 2 - \frac{1}{t+1}.$$

(2p)

(b) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 2$ gäller att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

(3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är en olikhet som skrivs om med ekvivalenta steg (**Logik och bevisföring**); (b) är ett bevis med **induktion** för en **summa**.

Ledtråd 2

(a) Flytta alla termer till en sida och skriv på gemensam nämnare. (b) Basfallet är $n = 2$.
Anta att $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{p}$ och visa motsvarande olikhet för $p + 1$.

Ledtråd 3

(a) $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{1}{t(t+1)^2}$. (b) Lägg till $\frac{1}{(p+1)^2}$ på båda sidor av induktionsantagandet och använd (a) med $t = p$.

Lösning

(a) Olikheten är ekvivalent med att skillnaden mellan högerledet och vänsterledet är positiv:

$$\left(2 - \frac{1}{t+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{(t+1)^2}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}$$

Med gemensam nämnare $t(t+1)^2$ blir detta

$$\frac{(t+1)^2 - t(t+1) - t}{t(t+1)^2} = \frac{t^2 + 2t + 1 - t^2 - t - t}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t(t+1)^2}$$

som är positivt för $t > 0$. Alltså gäller

$$2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{(t+1)^2} < 2 - \frac{1}{t+1} \text{ för } t > 0$$

(b) Basfall. För $n = 2$ är

$$\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{6}{4} = 2 - \frac{1}{2}$$

Induktionssteg. Anta att olikheten gäller för något heltal $p \geq 2$, dvs. $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{p}$ (induktionsantagandet). Då är

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(p+1)^2} < 2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2} < 2 - \frac{1}{p+1}$$

där den första olikheten är induktionsantagandet och den andra är (a) med $t = p > 0$. Alltså gäller olikheten även för $n = p + 1$.

Enligt induktionsprincipen gäller

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n} \text{ för alla heltal } n \geq 2$$

Alternativt bevis utan induktion. För $k \geq 2$ är $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, så

summan teleskoperar:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Anmärkning: delsummorna växer och är begränsade av 2, så serien konvergerar. Euler visade att summan är $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+t^2) - (1-t^2)}}{(1+t) - (1-t)}.$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden: (a) med instängning, (b) med ensidiga gränsvärden och (c) med **Kontinuitet**.

Ledtråd 2

(a) Skriv $\frac{n!}{n^n}$ som en produkt av n kvoter $\frac{k}{n}$. (b) Förenkla täljare och nämnare först, och kom ihåg att $\sqrt{t^2} = |t|$. (c) Titta på vilken punkt x går mot.

Ledtråd 3

(a) Alla kvoter utom den första är högst 1, så $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$. (b) Uttrycket blir $\frac{\sqrt{2}|t|}{2t}$. (c) Nämnaren är inte noll i $x = 1$.

Lösning

(a) För positiva heltal n är

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

eftersom varje faktor $\frac{k}{n}$ med $k \geq 2$ är högst 1. Eftersom $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ger instängningssatsen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

(b) Förenkling ger, för $t \neq 0$,

$$\frac{\sqrt{(1+t^2) - (1-t^2)}}{(1+t) - (1-t)} = \frac{\sqrt{2t^2}}{2t} = \frac{\sqrt{2} |t|}{2t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|t|}{t}$$

Här är $\frac{|t|}{t} = 1$ för $t > 0$ och -1 för $t < 0$, så

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|t|}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|t|}{t} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

De ensidiga gränsvärdena är olika:

gränsvärdet existerar inte

(c) Observera att $x \rightarrow 1$, inte $x \rightarrow 2$. Funktionen $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ är en kvot av polynom och kontinuerlig för alla $x \neq 2$, i synnerhet i $x = 1$. Alltså är

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = f(1) = \frac{1 - 8}{1 - 2} = \frac{-7}{-1} = 7$$

Kontrollerat mot facit.

3. Arcussinus och arcuscosinus under rät vinkel

Finn de värden på r för vilka kurvorna

$$y = f(x) = \arcsin rx$$

och

$$y = g(x) = \arccos rx$$

skär varandra under rät vinkel. I vilka punkter skär kurvorna varandra? **Ledning:** finns det något enkelt samband mellan dessa funktioner? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Arcusfunktioner och deras derivator. Två kurvor skär varandra under rät vinkel om tangenternas lutningar k_1 och k_2 i skärningspunkten uppfyller $k_1 k_2 = -1$.

Ledtråd 2

Använd $\arcsin u + \arccos u = \frac{\pi}{2}$ för $-1 \leq u \leq 1$ för att hitta skärningspunkten. Derivera sedan med kedjeregeln: $\frac{d}{dx} \arcsin rx = \frac{r}{\sqrt{1-r^2x^2}}$.

Ledtråd 3

I skärningspunkten är $\arcsin ra = \frac{\pi}{4}$, alltså $ra = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Lutningarna blir då $\pm r\sqrt{2}$.

Lösning

Skärningspunkt. För $-1 \leq u \leq 1$ gäller $\arcsin u + \arccos u = \frac{\pi}{2}$ (eftersom $\sin v = \cos(\frac{\pi}{2} - v)$).

Om kurvorna skär varandra i (a, b) är

$$b = \arcsin ra = \arccos ra = \frac{\pi}{2} - \arcsin ra$$

alltså $2 \arcsin ra = \frac{\pi}{2}$, dvs. $\arcsin ra = \frac{\pi}{4}$ och

$$ra = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

För $r = 0$ är kurvorna de parallella linjerna $y = 0$ och $y = \frac{\pi}{2}$, som inte skär varandra. För $r \neq 0$ finns precis en skärningspunkt:

$$(a, b) = \left(\frac{1}{r\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4} \right)$$

Rät vinkel. Kedjeregeln ger

$$f'(x) = \frac{r}{\sqrt{1-(rx)^2}}, \quad g'(x) = -\frac{r}{\sqrt{1-(rx)^2}}$$

I skärningspunkten är $(ra)^2 = \frac{1}{2}$, så $\sqrt{1-(ra)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och lutningarna är

$$k_1 = f'(a) = r\sqrt{2}, \quad k_2 = g'(a) = -r\sqrt{2}$$

Villkoret för rät vinkel är $k_1 k_2 = -1$:

$$-2r^2 = -1 \iff r^2 = \frac{1}{2} \iff r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Skärningspunkten är då $a = \frac{1}{r\sqrt{2}} = \pm 1$:

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} : (1, \frac{\pi}{4}), \quad r = -\frac{1}{\sqrt{2}} : (-1, \frac{\pi}{4})$$

Kontrollerat mot facit.

4. Tangent till en kruciform-kurva

Ekvationen

$$4x^2y^2 = 9x^2 + 9y^2$$

beskriver en så kallad *kruciform-kurva*.

(a) Finn tangenten till kurvan genom punkten $(\sqrt{3}, 3)$. (4p)

(b) Beräkna arean av triangeln som begränsas av koordinataxlarna och tangenten i uppgift 4.(a). (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Implicit derivering för att få tangentens lutning.

Ledtråd 2

Kontrollera att punkten ligger på kurvan. Sätt $y = y(x)$, derivera båda leden med avseende på x och lös ut y' . Tangenten fås med enpunktsformeln.

Ledtråd 3

$8xy^2 + 8x^2yy' = 18x + 18yy'$ ger $y' = \frac{(9 - 4y^2)x}{(4x^2 - 9)y}$. (b) Triangeln har kateterna lika med tangentens skärningar med axlarna.

 Lösning

(a) Punkten ligger på kurvan: $4 \cdot 3 \cdot 9 = 108$ och $9 \cdot 3 + 9 \cdot 9 = 27 + 81 = 108$.

Implicit derivering med $y = y(x)$:

$$8xy^2 + 8x^2yy' = 18x + 18yy' \iff (8x^2 - 18)yy' = 18x - 8xy^2 \iff y' = \frac{(9 - 4y^2)x}{(4x^2 - 9)y}$$

I $(\sqrt{3}, 3)$:

$$y' = \frac{(9 - 36)\sqrt{3}}{(12 - 9) \cdot 3} = \frac{-27\sqrt{3}}{9} = -3\sqrt{3}$$

Enpunktsformeln ger $y - 3 = -3\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) = -3\sqrt{3}x + 9$:

$$\boxed{y = 12 - 3\sqrt{3}x}$$

(b) Tangenten skär y -axeln i $y = 12$ och x -axeln där $3\sqrt{3}x = 12$, dvs. $x = \frac{12}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Triangeln är rätvinklig med dessa kateter, så

$$T = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \boxed{8\sqrt{3} \text{ a.e.}}$$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $x^{1/x}$

Betrakta funktionen

$$y = x^{1/x}, \quad x > 0.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Skissera kurvan. Andraderivatan behöver ej beaktas. **Ledning:** skriv först om funktionen på lämpligt sätt. (3p)

(b) Ange funktionens värdemängd. Motivera! (1p)

(c) Avgör vilket av talen $\sqrt[3]{3}$ och $\sqrt[4]{4}$ som är störst. Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning med teckenschema för derivatan. Skriv om potensen med exponentialfunktionen.

Ledtråd 2

$x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Undersök $\frac{\ln x}{x}$ då $x \rightarrow 0^+$ och $x \rightarrow \infty$, och derivera med kedjeregeln.

Ledtråd 3

$y' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$, som byter tecken i $x = e$. (c) $\sqrt[3]{3} = f(3)$ och $\sqrt[4]{4} = f(4)$ med $e < 3 < 4$.

Lösning

(a) För $x > 0$ är

$$y = f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

Asymptoter. Då $x \rightarrow 0^+$ går $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ och $\ln x \rightarrow -\infty$, så $\frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty$. Eftersom e^u är kontinuerlig och $e^u \rightarrow 0$ då $u \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = 0$$

Då $x \rightarrow \infty$ går $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ (standardgränsvärde), så

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = e^0 = 1$$

Funktionen är kontinuerlig och begränsad på $(0, \infty)$, så

enda asymptoten är den vågräta $y = 1$ då $x \rightarrow \infty$

Derivata. Kedjeregeln och kvotregeln ger

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = x^{1/x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Faktorerna $x^{1/x}$ och x^2 är positiva, så tecknet bestäms av $1 - \ln x$, som är noll i $x = e$.

	$0 < x < e$	e	$x > e$
$1 - \ln x$	+	0	-
x^2	+	+	+
$e^{\frac{\ln x}{x}}$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	lok. max	↘

$$\text{lok. max } f(e) = e^{1/e} \approx 1,445$$

Maximet är också globalt.

Skiss. Kurvan startar i origo (utan att nå dit), växer till $(e, e^{1/e})$, passerar $y = 1$ i $x = 1$ och avtar sedan mot asymptoten $y = 1$ ovanifrån.

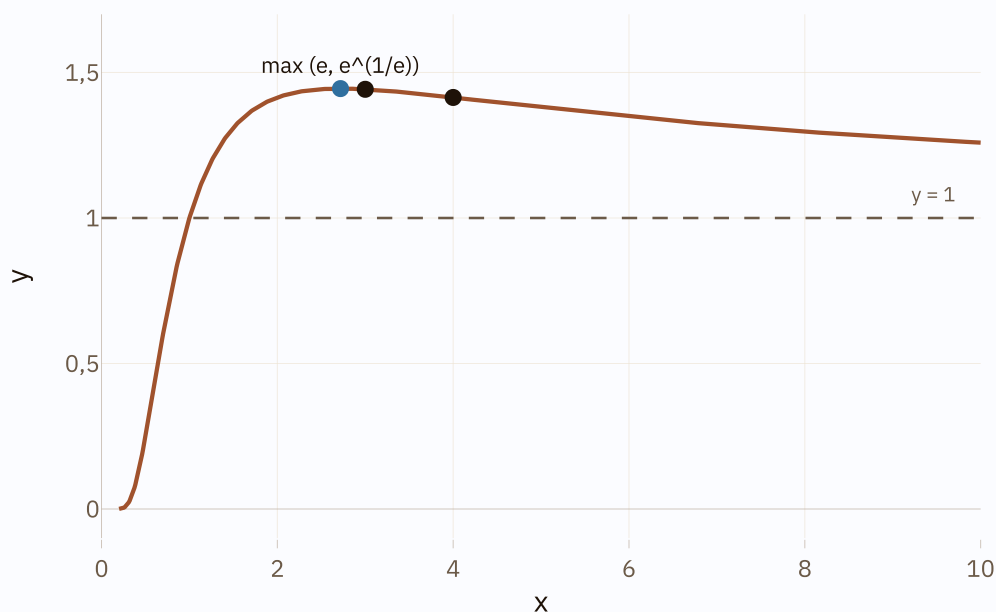
(b) f är kontinuerlig, växer från gränsvärdet 0 (som inte antas) upp till $e^{1/e}$ på $(0, e]$ och avtar sedan mot 1 utan att nå under 1 på $[e, \infty)$. Satsen om mellanliggande värden ger att alla värden däremellan antas:

$$V_f = (0, e^{1/e}]$$

(c) f är strängt avtagande på $[e, \infty)$ och $e < 3 < 4$, så

$$\sqrt[3]{3} = f(3) > f(4) = \sqrt[4]{4}$$

Alternativt: $3^4 = 81 > 64 = 4^3$, och upphöjt till $\frac{1}{12}$ ger det $3^{1/3} > 4^{1/4}$. Numeriskt är $\sqrt[3]{3} \approx 1,442$ och $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \approx 1,414$.



Kontrollerat mot facit.

6. Vattendjupet i en halvsfärisk tank

En tank har halvsfärisk form med radie $R = 2$ m. Tanken fylls på uppifrån med ett inflöde av vatten, se nedanstående figur.

(Figuren i originalet visar en halvsfärisk skål med radien R , vattenvolymen V och vattendjupet h mätt från skålens botten, och ett rör som fyller på uppifrån.)

När vattendjupet är h m så ges vattenvolymen V av

$$V = \frac{\pi h^2(3R - h)}{3} \text{ m}^3.$$

Med vilken hastighet ändras djupet h vid den tidpunkt då djupet är $\frac{1}{2}$ m och vatten tillförs med en hastighet av 11 liter per sekund? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Relaterade hastigheter: derivera sambandet med avseende på tiden med kedjeregeln (Deriveringsregler, Implicit derivering).

Ledtråd 2

V och h är funktioner av t , så $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$. Räkna om 11 liter per sekund till m^3/s .

Ledtråd 3

$\frac{dV}{dh} = \pi(2Rh - h^2)$, som för $R = 2$ och $h = \frac{1}{2}$ är $\frac{7\pi}{4}$. Och $11 \text{ l/s} = 0,011 \text{ m}^3/\text{s}$.

Lösning

Både $V = V(t)$ och $h = h(t)$ beror på tiden. Derivering med kedjeregeln ger

$$V'(t) = \frac{\pi}{3} (6Rh - 3h^2) h'(t) = \pi (2Rh - h^2) h'(t)$$

alltså

$$h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi (2Rh - h^2)}$$

Vid tidpunkten t_0 är $h = \frac{1}{2} \text{ m}$, $R = 2 \text{ m}$ och $V'(t_0) = 11 \text{ l/s} = \frac{11}{1000} \text{ m}^3/\text{s}$. Då är

$$2Rh - h^2 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

och

$$h'(t_0) = \frac{11/1000}{7\pi/4} = \frac{44}{7000\pi} \text{ m/s} = \frac{44}{7\pi} \text{ mm/s}$$

djupet ökar med $\frac{44}{7\pi} \text{ mm/s} \approx 2,0 \text{ mm/s}$

Anmärkning: med $\pi \approx \frac{22}{7}$ blir det precis 2 mm/s .

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
 - [Matematisk induktion](#)
 - [Talföljder och summor](#)
 - [Gränsvärden](#)
 - [Kontinuitet](#)
 - [Arcusfunktioner](#)
 - [Derivata](#)
 - [Implicit derivering](#)
 - [Deriveringsregler](#)
 - [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
 - [Extremvärden](#)
 - [Grafritning och asymptoter](#)
-