

M0047M-2021-10-28

19 okt. 2026, 13 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2021-10-28 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_211028.pdf, m0047m_211028sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för en teleskopsumma med rötter och en aritmetisk summa av tröjnummer
- Uppgift 2: tre gränsvärden med $\arcsin$ / $\arccos$, logaritmer och rotkonjugat vid $-\infty$
- Uppgift 3: krökningen för parabeln $y = x^2$ och för en cirkel via implicit derivering
- Uppgift 4: taylorpolynom för sagittan $h(s)$ och ett rep spänt över Bajkalsjön
- Uppgift 5: värdemängd, antal nollställen, lokalisering och inverterbarhet för $x^5 - 5x + 7$
- Uppgift 6: vattenstråle ur en tank, var hålet ska sitta för maximal räckvidd

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Teleskopsumma med induktion och en aritmetisk summa

(a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} = \sqrt{n}.$$

Ledning: rotkonjugat. (4p)

(b) De n spelarna i laget "Oddballs" har valt sina unika tröjnummer att vara de udda talen från 5 upp till $2n + 3$ (dvs 5, 7, 9, 11, $\dots$, $2n + 3$). Summan av alla spelares tröjnummer är 396. Hur många spelare finns det i laget? (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett bevis med **induktion**; (b) är en aritmetisk summa (**Talföljder och summor**).

Ledtråd 2

(a) Basfall $n = 1$. I induktionssteget: dela upp summan till $p + 1$ i summan till p plus den sista termen. (b) En aritmetisk summa är antalet termer gånger medelvärdet av första och sista termen: $\frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Ledtråd 3

(a) Förläng den sista termen med rotkonjugatet: $\frac{1}{\sqrt{p} + \sqrt{p+1}} = \sqrt{p+1} - \sqrt{p}$. (b) Ekvationen blir $n(n+4) = 396$; lägg till 4 på båda sidor.

Lösning

(a) **Basfall.** För $n = 1$ är

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{0} + \sqrt{1}} = 1 = \sqrt{1}$$

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för $n = p$, dvs. $\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} = \sqrt{p}$

(induktionsantagandet). Då är

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} &= \sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p} + \sqrt{p+1}} = \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p+1} - \sqrt{p}}{(\sqrt{p+1} + \sqrt{p})(\sqrt{p+1} - \sqrt{p})} \\ &= \sqrt{p} + \frac{\sqrt{p+1} - \sqrt{p}}{(p+1) - p} = \sqrt{p} + \sqrt{p+1} - \sqrt{p} = \sqrt{p+1} \end{aligned}$$

så formeln gäller även för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} = \sqrt{n} \text{ för alla heltal } n \geq 1$$

Alternativt bevis utan induktion. Varje term förlängd med rotkonjugatet blir $\sqrt{k} - \sqrt{k-1}$, så summan teleskoperar:

$$(\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{n} - \sqrt{0} = \sqrt{n}$$

(b) Talen $5, 7, \dots, 2n + 3$ bildar en aritmetisk följd med differensen 2 och n termer, så

$$396 = \frac{n(5 + (2n + 3))}{2} = \frac{n(2n + 8)}{2} = n(n + 4)$$

Addera 4 på båda sidor: $400 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$, så $n + 2 = \pm 20$, dvs. $n = 18$ eller $n = -22$. Antalet spelare är positivt:

$$n = 18 \text{ spelare}$$

$$\text{Kontroll: } 5 + 7 + \dots + 39 = 18 \cdot \frac{5 + 39}{2} = 18 \cdot 22 = 396.$$

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\arcsin x}{\arccos x}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2)}{\ln(2x^3)}$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden och gränsvärden i oändligheten: (a) kontinuitet för Arcusfunktioner, (b) logaritmlagar, (c) rotkonjugat.

Ledtråd 2

(a) $\arcsin$ och $\arccos$ är definierade och kontinuerliga på $[-1, 1]$, så det räcker att sätta in $x = -1$. (b) Skriv $\ln(3x^2) = \ln 3 + 2 \ln x$ och bryt ut $\ln x$. (c) Förläng med $x - \sqrt{x^2 - 1}$.

Ledtråd 3

(c) Efter förlängningen blir täljaren x . I nämnaren är $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ när $x < 0$, så bryt ut x med rätt tecken.

Lösning

(a) Både $\arcsin$ och $\arccos$ är högerkontinuerliga i -1 , och $\arccos(-1) = \pi \neq 0$, så

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\arcsin x}{\arccos x} = \frac{\arcsin(-1)}{\arccos(-1)} = \frac{-\pi/2}{\pi} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Observera att $\frac{\arcsin x}{\arccos x} \neq \arctan x$.

(b) Med logaritmlagarna och division med $\ln x$ (som går mot ∞):

$$\frac{\ln(3x^2)}{\ln(2x^3)} = \frac{\ln 3 + 2 \ln x}{\ln 2 + 3 \ln x} = \frac{\frac{\ln 3}{\ln x} + 2}{\frac{\ln 2}{\ln x} + 3} \rightarrow \frac{0 + 2}{0 + 3}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2)}{\ln(2x^3)} = \frac{2}{3}}$$

(c) Förläng med rotkonjugatet:

$$x(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{x(x^2 - (x^2 - 1))}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{x - |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

För $x < 0$ är $|x| = -x$, så uttrycket blir

$$\frac{x}{x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{1}{1 + 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{2}}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Krökning för en parabel och en cirkel

Vi definierar *krökningen* $\kappa = \kappa(x)$ i en punkt x på kurva C given av funktionen $y = f(x)$ som

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}.$$

(a) Beräkna krökningen för parabeln

$$y = f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

i punkten $x = \sqrt{2}$. (2p)

(b) Beräkna krökningen i varje punkt på cirkeln

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad y \neq 0,$$

med radie R (konstant). **Ledning:** Sätt $y = y(x)$ och derivera implicit. (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Insättning i en formel med första- och **andrerivata**; i (b) behövs **Implicit derivering** två gånger.

Ledtråd 2

(a) $y' = 2x$ och $y'' = 2$. (b) Derivera $x^2 + y^2 = R^2$ med avseende på x : $2x + 2yy' = 0$. Derivera en gång till.

Ledtråd 3

(b) Andra deriveringen ger $1 + (y')^2 + yy'' = 0$. Med $y' = -\frac{x}{y}$ blir $1 + (y')^2 = \frac{R^2}{y^2}$ och $y'' = -\frac{R^2}{y^3}$.

Lösning

(a) $y' = 2x$ och $y'' = 2$, så

$$\kappa(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}, \quad \kappa(\sqrt{2}) = \frac{2}{(1 + 4 \cdot 2)^{3/2}} = \frac{2}{9^{3/2}} = \frac{2}{27}$$

$\kappa(\sqrt{2}) = \frac{2}{27}$

(b) Låt $y = y(x)$. Derivering av $x^2 + y^2 = R^2$ med avseende på x ger

$$2x + 2yy' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

och en derivering till av $2x + 2yy' = 0$ ger

$$2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0 \implies y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y}$$

Här är

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{R^2}{y^2}, \quad y'' = -\frac{R^2}{y^3}$$

Alltså

$$\kappa = \frac{\frac{R^2}{|y|^3}}{\left(\frac{R^2}{y^2}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{R^2}{|y|^3}}{\frac{R^3}{|y|^3}} = \frac{1}{R}$$

$$\kappa = \frac{1}{R} \text{ i varje punkt på cirkeln}$$

Kr kningen är konstant, och radien är just $1/\kappa$ (krökningsradien).

Kontrollerat mot facit.

4. Sagittan och ett rep över Bajkalsjön

Höjden $h = h(s)$ (kallad *sagitta*) av ett cirkelsegment med båglängd s ges av

$$h = R \left(1 - \cos \frac{s}{2R} \right),$$

där R (konstant)  r cirkelns radie, se nedanstående figur.

Figuren i tentan: en cirkelsektor med radien R och medelpunktsvinkeln 2ϕ . B gen är uppdelad i två halvor med längden $s/2$ vardera. Kordan mellan bågens ändpunkter har halva längden $x/2$ på var sida om symmetrilinjen. Längs symmetrilinjen  r avståndet från medelpunkten till kordan $R - h$ och avståndet från kordan till b gen h .

(a) Beräkna $h(0)$, $h'(0)$ och $h''(0)$. (2p)

(b) Finn taylorpolynomet $P_2(s)$ av ordning 2 kring $s = 0$ till funktionen $h = h(s)$. (2p)

(c) Antag att vi skulle spänna ett rep tvärs över en s km lång sjö på jorden. Då skulle repet som djupast ligga h km under ytan mitt på sjön, där h ges av uttrycket ovan. Bajkalsjön  r ungefär 640 km lång och jordens radie R är ungefär 6400 km. Använd taylorpolynomet i (b) för att approximera det maximala djupet som ett sp nt rep skulle hamna under Bajkalsj ns yta. Man kan här anta att sjön är bottenlös. (1p)

Totalp ng: 5

Ledtråd 1

Taylor's formel av ordning 2, efter derivering med kedjeregeln (Deriveringsregler).

Ledtråd 2

$$P_2(s) = h(0) + h'(0)s + \frac{h''(0)}{2!}s^2. \text{ Den inre derivatan av } \frac{s}{2R} \text{  r } \frac{1}{2R}.$$

Ledtråd 3

$$h'(s) = \frac{1}{2} \sin \frac{s}{2R} \text{ och } h''(s) = \frac{1}{4R} \cos \frac{s}{2R}.$$

Lösning

(a) Med kedjeregeln:

$$h'(s) = R \cdot \frac{1}{2R} \sin \frac{s}{2R} = \frac{1}{2} \sin \frac{s}{2R}, \quad h''(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2R} \cos \frac{s}{2R} = \frac{1}{4R} \cos \frac{s}{2R}$$

så

$$h(0) = R(1 - \cos 0) = 0, \quad h'(0) = \frac{1}{2} \sin 0 = 0, \quad h''(0) = \frac{1}{4R}$$

(b)

$$P_2(s) = h(0) + h'(0)s + \frac{h''(0)}{2!}s^2 = 0 + 0 \cdot s + \frac{s^2}{2 \cdot 4R}$$

$$P_2(s) = \frac{s^2}{8R}$$

(c) För s litet jämfört med R är $h(s) \approx P_2(s)$. Med $s = 640$ km och $R = 6400$ km:

$$h(640) \approx P_2(640) = \frac{640^2}{8 \cdot 6400} = \frac{64 \cdot 64 \cdot 100}{8 \cdot 64 \cdot 100} = \boxed{8 \text{ km}}$$

Det exakta värdet $6400(1 - \cos \frac{1}{20}) \approx 7,998$ km visar att approximationen är mycket god.

Bajkalsjöns största djup är ungefär 1,6 km, så i verkligheten skulle repet ta i botten.

Kontrollerat mot facit.

5. Nollställena och inverterbarhet för $x^5 - 5x + 7$

Låt

$$y = p(x) = x^5 - 5x + 7, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Använd verktyg och begrepp som gränsvärden, teckenstudium av derivatan, graf och satsen om mellanliggande värden för att motivera svaren till nedanstående uppgifter.

(a) Vad är värdemängden för p ? Motivera! (1p)

(b) Avgör hur många reella nollställen som polynomet $p(x)$ har. Motivera! (2p)

(c) Lokalisera nollställena i uppgift (b) genom att ange i vilka intervall $[m, n]$ (där m och n är heltal, $n = m + 1$) nollställena ligger. Motivera! (1p)

(d) Är funktionen p inverterbar? Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Ekvationslösning med derivata: [[Oegentliga gränsvärden|gränsvärden i $\pm\infty$]], teckenschema för derivatan, satsen om mellanliggande värden (Kontinuitet) och inverterbarhet.

Ledtråd 2

(a) Undersök $p(x)$ när $x \rightarrow \pm\infty$. (b) Faktorisera $p'(x) = 5(x^4 - 1)$ och beräkna de lokala extremvärdena. (c) Pröva tecknet för p i heltalspunkter. (d) En inverterbar funktion måste vara injektiv.

Ledtråd 3

$p(-1) = 11$ (lok. max) och $p(1) = 3$ (lok. min). Båda är positiva, så grafen kan bara skära x -axeln till vänster om $x = -1$. $p(-2) = -15$.

Lösning

(a) p är ett polynom, alltså kontinuerligt på $\mathbb{R}$, och

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^5 \left(1 - \frac{5}{x^4} + \frac{7}{x^5}\right) = \pm\infty$$

Enligt satsen om mellanliggande värden antar p alla värden mellan dessa, så

$$V_p = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

(b) Derivatan är

$$p'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 5(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

med kritiska punkter $x = \pm 1$. Eftersom $x^2 + 1 > 0$:

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$x + 1$	–	0	+	+	+
$x - 1$	–	–	–	0	+
$5(x^2 + 1)$	+	+	+	+	+
$p'(x)$	+	0	–	0	+
$p(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

med $p(-1) = -1 + 5 + 7 = 11$ och $p(1) = 1 - 5 + 7 = 3$.

- På $(-\infty, -1]$ är p strängt växande från $-\infty$ till 11, så där finns exakt ett nollställe.
- På $[-1, 1]$ är p avtagande, så $p(x) \geq p(1) = 3 > 0$.
- På $[1, \infty)$ är p växande, så $p(x) \geq 3 > 0$.

p har exakt ett reellt nollställe

(c) Nollstället ligger i $(-\infty, -1)$. Eftersom

$$p(-2) = -32 + 10 + 7 = -15 < 0 \quad \text{och} \quad p(-1) = 11 > 0$$

ger satsen om mellanliggande värden att nollstället ligger i

$$[-2, -1]$$

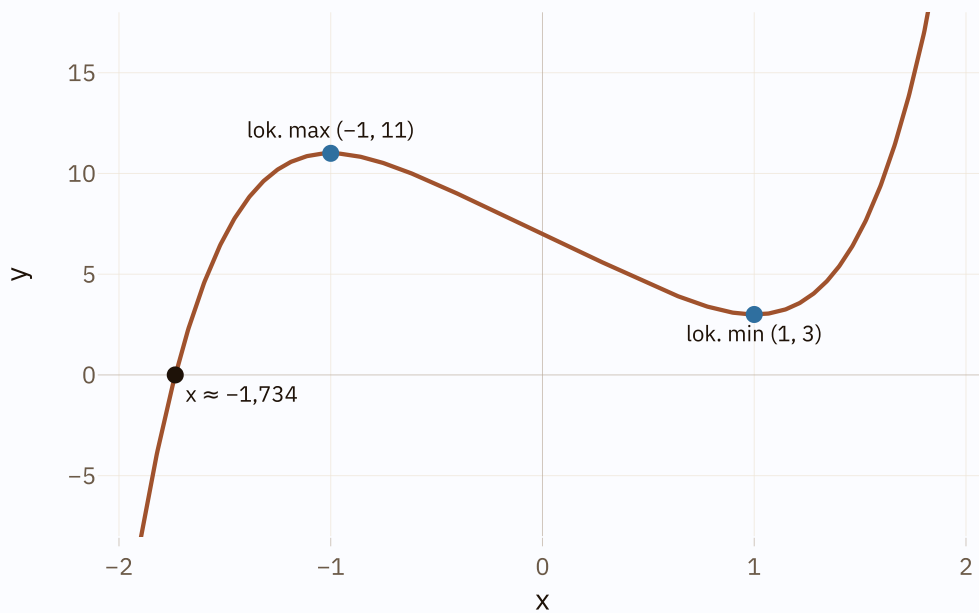
(Intervallhalvering: $p(-\frac{3}{2}) = \frac{221}{32} > 0$, så nollstället ligger till och med i $[-2, -\frac{3}{2}]$. Numeriskt är det $x \approx -1,734$.)

(d) p är inte injektiv: till exempel har ekvationen $p(x) = 5$ tre lösningar, en i varje intervall $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ och $(1, \infty)$, eftersom $3 < 5 < 11$ och p går mot $\mp\infty$ i ändarna. Alltså

p är inte inverterbar på $\mathbb{R}$

Begränsar man definitionsmängden till exempelvis $[1, \infty)$ blir p strängt växande och därmed inverterbar.

Skiss.



Kontrollerat mot facit.

6. Vattenstrålen ur tanken

Antag att vi har en cylindrisk vertikal vattentank med höjd H som är fylld med vatten. Vi lägger in ett koordinatsystem som i figuren härunder.

Figuren i tentan: en stående cylinder med tankväggen längs y -axeln och markplanet längs x -axeln. Höjden H är markerad vid tankens överkant och hålet på höjden h . Från hålet går en parabelformad vattenstråle genom en punkt (x, y) och träffar marken i $x = D$.

Vi slår sedan ett litet hål på tanken på höjden h över markplanet varpå vatten börjar strila ut följandes parabeln

$$y = h - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_x} \right)^2,$$

där g är tyngdaccelerationen och v_x vattnets horisontella hastighet som enligt Torricellis lag är proportionell mot roten ur vattenpelarens höjd, mer specifikt

$$v_x = \sqrt{2g(H - h)}.$$

(a) Låt D vara avståndet från tanken där vattenstrålen träffar markplanet direkt efter vi slagit hål på tanken. Finn ett uttryck som relaterar D till hålets höjd h . (2p)

(b) På vilken höjd h skall hålet göras för att D ska bli maximal och vad blir då D för detta värde på h ? (3p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Optimering: **största värdet** av en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall.

Ledtråd 2

(a) Sätt in v_x i parabeln och lös $y = 0$ för $x = D$. (b) Undersök $D(h)$ för $0 \leq h \leq H$: ändpunkter, singulära punkter och kritiska punkter.

Ledtråd 3

(a) g tar ut sig: $y = h - \frac{x^2}{4(H-h)}$. (b) $D(h) = 2\sqrt{Hh - h^2}$; det räcker att maximera $Hh - h^2$.

Lösning

(a) Insättning av $v_x^2 = 2g(H-h)$ ger

$$y = h - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{2g(H-h)} = h - \frac{x^2}{4(H-h)}$$

Strålen träffar marken i $x = D$ där $y = 0$:

$$0 = h - \frac{D^2}{4(H-h)} \iff D^2 = 4h(H-h)$$

$$\boxed{D = 2\sqrt{h(H-h)}}$$

(b) Vi söker största värdet av $D(h) = 2\sqrt{Hh - h^2}$ på $[0, H]$, en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall, så största värdet antas. I ändpunkterna är $D(0) = D(H) = 0$. Derivatan är

$$D'(h) = \frac{2(H-2h)}{2\sqrt{Hh-h^2}} = \frac{H-2h}{\sqrt{Hh-h^2}}, \quad 0 < h < H$$

Den enda kritiska punkten är $h = \frac{H}{2}$ ($D' > 0$ före och $D' < 0$ efter), och där är

$$D\left(\frac{H}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{H}{2}\left(H - \frac{H}{2}\right)} = 2 \cdot \frac{H}{2} = H$$

$$h = \frac{H}{2} \text{ ger maximal räckvidd } D_{\max} = H$$

Alternativ lösning. Kvadratkomplettering: $Hh - h^2 = \frac{H^2}{4} - \left(h - \frac{H}{2}\right)^2$, så $D = \sqrt{H^2 - (2h - H)^2}$, som är störst, $\sqrt{H^2} = H$, när $2h - H = 0$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Talföljder och summor](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Arcusfunktioner](#)
- [Implicit derivering](#)
- [Andraderivata och konvexitet](#)
- [Taylors formel](#)
- [Ekvationslösning med derivata](#)
- [Kontinuitet](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Extremvärden](#)