

M0047M-2021-08-18

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2021-08-18 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_210818.pdf, m0047m_210818solsny.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för $\sum_{k=2}^n \ln(1 - \frac{1}{k}) = -\ln n$ och en koefficient i binomialutvecklingen av $(2x^2 + \frac{1}{x})^5$
- Uppgift 2: tre gränsvärden, $\sin \frac{1}{x^2}$ vid 0, en trigonometrisk kvot vid $\frac{\pi}{4}$ och $\arcsin \frac{x+1}{x+2}$ i oändligheten
- Uppgift 3: inverterbarhet, inversens värde och inversens första och andra derivata för $x^3 + 3x - 1$
- Uppgift 4: fritt fall med kvadratisk luftmotstånd, kontroll av en lösning och gränshastigheten
- Uppgift 5: extremvärden, asymptoter och konvexitet för $xe^{1/x}$
- Uppgift 6: optimering av en stadionform med given omkrets

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. En logaritmsumma och en binomialkoefficient

(a) Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 2$ gäller att

$$\sum_{k=2}^n \ln(1 - \frac{1}{k}) = -\ln n.$$

(4p)

(b) Bestäm koefficienten för x^3 -termen i binomialutvecklingen av

$$\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^5.$$

Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) är ett bevis med **induktion** om en **summa**; (b) är binomialsatsen med **binomialkoefficienter**.

Ledtråd 2

(a) Basfallet är $n = 2$. Anta att formeln gäller för $n = p$ och lägg till termen $k = p + 1$. (b)

Den allmänna termen är $\binom{5}{k}(2x^2)^{5-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$.

Ledtråd 3

(a) $1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}$, och $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$. (b) Exponenten för x blir $10 - 3k$. Kan den bli 3?

Lösning

(a) Basfall. För $n = 2$ är

$$VL = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 = HL$$

Induktionssteg. Anta att formeln gäller för något heltal $p \geq 2$, dvs.

$$\sum_{k=2}^p \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\ln p \quad (\text{induktionsantagandet})$$

Då är

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{p+1} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^p \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) = -\ln p + \ln \frac{p}{p+1} \\ &= -\ln p + \ln p - \ln(p+1) = -\ln(p+1)\end{aligned}$$

vilket är formeln för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller

$$\boxed{\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\ln n \text{ för alla heltal } n \geq 2}$$

Alternativt bevis (teleskopsumma). $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln \frac{k-1}{k} = \ln(k-1) - \ln k$, så

$$\sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln k) = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln(n-1) - \ln n) = \ln 1 - \ln n = -\ln n$$

(b) Binomialsatsen ger

$$\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (2x^2)^{5-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 2^{5-k} x^{10-3k}$$

Exponenterna är $10 - 3k \in \{10, 7, 4, 1, -2, -5\}$. Ekvationen $10 - 3k = 3$ ger $k = \frac{7}{3}$, som inte är ett heltal, så det finns ingen x^3 -term:

koefficienten är 0

Hela utvecklingen är $32x^{10} + 80x^7 + 80x^4 + 40x + 10x^{-2} + x^{-5}$.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x^2}$$

(1p)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$$

(2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{x+1}{x+2}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden: (a) en oscillerande funktion, (b) ett " $\frac{0}{0}$ "-uttryck som förenklas med trigonometriska identiteter, (c) Kontinuitet hos $\arcsin$.

Ledtråd 2

(a) Vilka värden antar $\sin \frac{1}{x^2}$ nära 0? (b) Använd formeln för dubbla vinkeln på $\cos 2x$. (c) Eftersom $\arcsin$ är kontinuerlig kan gränsvärdet flyttas in.

Ledtråd 3

(a) $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$, så sinus sveper över $[-1, 1]$ oändligt många gånger. (b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$. (c) $\frac{x+1}{x+2} \rightarrow 1$.

Lösning

(a) När $x \rightarrow 0$ går $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$. Välj till exempel

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}}$$

Båda följderna går mot 0, men $\sin \frac{1}{x_n^2} = 1$ och $\sin \frac{1}{z_n^2} = -1$ för alla n . I varje intervall $(-\delta, \delta)$ antar funktionen alltså både värdet 1 och värdet -1 , så den kan inte närma sig ett enda tal:

gränsvärdet existerar inte

(b) Med $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ och konjugatregeln, för $x \neq \frac{\pi}{4}$ nära $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x$$

Detta är kontinuerligt, så

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}}$$

(c) För $x > 0$ är $\frac{1}{2} < \frac{x+1}{x+2} < 1$, så uttrycket ligger i definitionsmängden för arcsin, och

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$

Eftersom arcsin är kontinuerlig på $[-1, 1]$ (vid 1 från vänster) får vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{x+1}{x+2} = \arcsin 1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Kontrollerat mot facit.

3. Inversen till $x^3 + 3x - 1$ och dess derivator

Låt

$$f(x) = x^3 + 3x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att funktionen är inverterbar. (1p)

(b) Finn

$$f^{-1}(3).$$

(1p)

(c) Beräkna

$$(f^{-1})'(3).$$

(2p)

(d) Beräkna

$$(f^{-1})''(3).$$

Ledning: gör ytterligare en implicit derivering. (1p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1

Inverterbarhet via derivatans tecken, och Inversa funktioners derivata med Implicit derivering.

 Ledtråd 2

(a) En strängt växande funktion är injektiv. (b) $y = f^{-1}(3) \iff f(y) = 3$. (c)–(d) Derivera $x = f(y)$ implicit med avseende på x , en och två gånger.

 Ledtråd 3

(b) Gissa en heltalsrot till $y^3 + 3y - 4 = 0$. (c) $1 = f'(y)y'$. (d) $0 = f''(y)(y')^2 + f'(y)y''$.

 Lösning

(a)

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(1 + x^2) \geq 3 > 0$$

så f är strängt växande på hela $\mathbb{R}$ och därmed injektiv, dvs. f är inverterbar.

(b) $y = f^{-1}(3) \iff f(y) = 3 \iff y^3 + 3y - 4 = 0$. Här ser man direkt att $y = 1$ är en rot. Eftersom f är injektiv finns det ingen annan reell rot (faktoriseringen $y^3 + 3y - 4 = (y - 1)(y^2 + y + 4)$ bekräftar det, andragsgradsfaktorn saknar reella rötter). Alltså

$$\boxed{f^{-1}(3) = 1}$$

(c) Låt $y = f^{-1}(x)$, dvs. $x = f(y) = y^3 + 3y - 1$. Implicit derivering med avseende på x :

$$1 = f'(y)y' = 3(1 + y^2)y' \iff y' = \frac{1}{3(1 + y^2)}$$

I $x = 3$ är $y = 1$, så

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{3(1+1^2)} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

(d) Derivera $1 = f'(y)y'$ en gång till med avseende på x (produkt- och kedjeregeln):

$$0 = f''(y)(y')^2 + f'(y)y'' \iff y'' = -\frac{f''(y)(y')^2}{f'(y)} = -\frac{f''(y)}{(f'(y))^3}$$

där vi använt $y' = \frac{1}{f'(y)}$. Med $f''(y) = 6y$, $y = 1$ och $f'(1) = 6$:

$$(f^{-1})''(3) = -\frac{6 \cdot 1}{6^3} = \boxed{-\frac{1}{36}}$$

Kontrollerat mot facit.

4. Fritt fall med luftmotstånd

Ett objekt med massa m som faller under inverkan av jordaccelerationen g i en atmosfär där luftmotståndet är proportionellt mot objektets hastighet i kvadrat uppfyller rörelseekvationen

$$mv' = mg - kv^2,$$

där $v = v(t)$ är objektets hastighet, t tiden och k en proportionalitetskonstant.

(a) Visa att

$$v(t) = \frac{g}{\lambda} \cdot \frac{e^{2\lambda t} - 1}{e^{2\lambda t} + 1}, \quad \text{där} \quad \lambda = \sqrt{\frac{kg}{m}},$$

är lösning till rörelseekvationen om objektet släpps från vila (dvs. $v(0) = 0$). (3p)

(b) När $t \rightarrow \infty$ kommer objektets hastighet $v(t)$ att gå mot en konstant hastighet, den så kallade gränshastigheten V_t . Bestäm V_t (uttryckt i storheterna m , g och k). Antag här att objektet faller i all oändlighet. (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kontroll av en lösning genom **derivering** (kvotregeln) och ett **gränsvärde i oändligheten** för **exponentialfunktioner**. Uttrycket är egentligen $\frac{g}{\lambda} \tanh(\lambda t)$, se **Hyperboliska funktioner**.

Ledtråd 2

(a) Kontrollera $v(0) = 0$, beräkna mv' och $mg - kv^2$ var för sig och jämför. (b) Förläng med $e^{-2\lambda t}$.

Ledtråd 3

(a) $k \frac{g^2}{\lambda^2} = mg$, och $(e^{2\lambda t} + 1)^2 - (e^{2\lambda t} - 1)^2 = 4e^{2\lambda t}$. (b) $\frac{g}{\lambda} = g \sqrt{\frac{m}{kg}}$.

Lösning

(a) Begynnelsevillkoret:

$$v(0) = \frac{g}{\lambda} \cdot \frac{e^0 - 1}{e^0 + 1} = 0$$

Vänster led. Kvotregeln ger

$$v'(t) = \frac{g}{\lambda} \cdot \frac{2\lambda e^{2\lambda t}(e^{2\lambda t} + 1) - (e^{2\lambda t} - 1) \cdot 2\lambda e^{2\lambda t}}{(e^{2\lambda t} + 1)^2} = \frac{g}{\lambda} \cdot \frac{4\lambda e^{2\lambda t}}{(e^{2\lambda t} + 1)^2} = \frac{4g e^{2\lambda t}}{(e^{2\lambda t} + 1)^2}$$

$$\text{så } mv' = mg \cdot \frac{4e^{2\lambda t}}{(e^{2\lambda t} + 1)^2}.$$

Höger led. Eftersom $\lambda^2 = \frac{kg}{m}$ är $k \cdot \frac{g^2}{\lambda^2} = k \cdot \frac{g^2 m}{kg} = mg$, så

$$mg - kv^2 = mg - mg \frac{(e^{2\lambda t} - 1)^2}{(e^{2\lambda t} + 1)^2} = mg \cdot \frac{(e^{2\lambda t} + 1)^2 - (e^{2\lambda t} - 1)^2}{(e^{2\lambda t} + 1)^2} = mg \cdot \frac{4e^{2\lambda t}}{(e^{2\lambda t} + 1)^2}$$

Leden är lika, så $v(t)$ uppfyller $mv' = mg - kv^2$ och $v(0) = 0$.

(b) Förlängning med $e^{-2\lambda t}$ ger

$$V_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g}{\lambda} \cdot \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{1 + e^{-2\lambda t}} = \frac{g}{\lambda} \cdot \frac{1 - 0}{1 + 0} = \frac{g}{\sqrt{kg/m}} = g \sqrt{\frac{m}{kg}}$$

eftersom $\lambda > 0$ så att $e^{-2\lambda t} \rightarrow 0$. Alltså

$$V_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Kontroll: vid gränshastigheten är $v' = 0$, så $mg - kV_t^2 = 0$, dvs. luftmotståndet balanserar precis tyngdkraften.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $xe^{1/x}$

Definiera funktionen

$$y = f(x) = xe^{1/x}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentligt teckenschema över derivatan. Ange i vilka intervall kurvan är konvex respektive konkav. Skissera kurvan. **Ledning:** man kan ha hjälp av standardgränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

(5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: ensidiga gränsvärden vid $x = 0$, sned asymptot, teckenschema för derivatan och andraderivatan.

Ledtråd 2

Undersök $x \rightarrow 0^\pm$ (sätt $t = \frac{1}{x}$), $\frac{f(x)}{x}$ och $f(x) - x$ då $x \rightarrow \pm\infty$ (sätt $h = \frac{1}{x}$). Derivera med produkt- och kedjeregeln.

Ledtråd 3

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^{1/x}}{x} \text{ och } f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}.$$

 Lösning

Definitionsmängd och tecken. f är definierad för $x \neq 0$. Eftersom $e^{1/x} > 0$ har $f(x)$ samma tecken som x .

Lodrät asymptot. Med $t = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Alltså är $x = 0$ en lodrät asymptot (från höger); från vänster går kurvan mot origo.

Sned asymptot. $f(x) \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$, så det finns ingen vågrät asymptot. Men

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

och med $h = \frac{1}{x} \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

lodrät asymptot $x = 0$ ($x \rightarrow 0^+$), sned asymptot $y = x + 1$ ($x \rightarrow \pm\infty$)

Derivata.

$$f'(x) = e^{1/x} + x e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{(x-1)e^{1/x}}{x}$$

Enda kritiska punkten är $x = 1$.

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$x - 1$	–	–	–	0	+
x	–	0	+	+	+
$e^{1/x}$	+	odef.	+	+	+
$f'(x)$	+	odef.	–	0	+
$f(x)$	↗	asymptot	↘	lok. min	↗

lok. min $f(1) = e$

Det finns inget lokalt maximum.

Andraderivata.

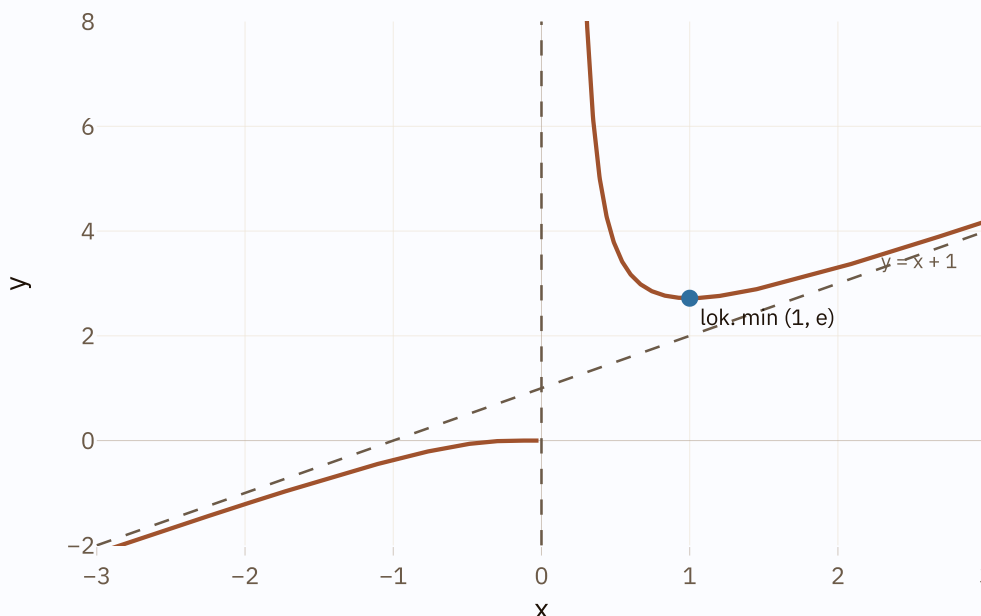
$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(e^{1/x} - \frac{e^{1/x}}{x} \right) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x} \cdot x - e^{1/x}}{x^2} = -\frac{e^{1/x}}{x^2} + \frac{e^{1/x}}{x^3} + \frac{e^{1/x}}{x^2} = \frac{e^{1/x}}{x^3}$$

f'' har samma tecken som x^3 och är aldrig noll:

konkav för $x < 0$, konvex för $x > 0$, inga inflexionspunkter

Teckenbytet sker vid $x = 0$, som inte tillhör definitionsmängden, så det ger ingen inflexionspunkt.

Skiss. För $x < 0$ växer kurvan, konkav, från den sneda asymptoten $y = x + 1$ (underifrån, eftersom $f(x) - (x + 1) < 0$ där) upp mot origo. För $x > 0$ kommer den ner från $+\infty$ längs y -axeln, har minimum i $(1, e)$ och närmar sig sedan $y = x + 1$ ovanifrån.



Kontrollerat mot facit.

6. Optimal stadionform

En *stadion* är en tvådimensionell geometrisk figur konstruerad av en rektangel och två halvcirklar på motsatta sidor av rektangeln, se nedanstående figur.

Figuren i tentan: en rektangel med den vågräta sidan b och den lodräta sidan h , med en halvcirkel med diametern h fäst på vardera kortsidan. Stadions rand består alltså av två raka sträckor med längden b och två halvcirkelbågar.

För en stadion med given omkrets P , finn rektangelns sidor b och h (uttryckta i P) som

- (a) ger maximal area på rektangeln. Hur stor är då rektangelns maximala area uttryckt i P ? (3p)
- (b) ger maximal total innesluten area av stadion. Hur stor är då inneslutna områdets maximala area uttryckt i P ? (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Optimering: **största värde** för en kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall.

Ledtråd 2

Omkretsen är $P = 2b + \pi h$. Lös ut b , skriv arean som funktion av h och bestäm vilka h som är tillåtna. Undersök kritiska punkter och ändpunkter.

Ledtråd 3

$b = \frac{P - \pi h}{2}$ med $0 \leq h \leq \frac{P}{\pi}$. (a) $A_r = bh$. (b) $A_s = bh + \frac{\pi h^2}{4}$; var hamnar den kritiska punkten?

Lösning

Uppställning. Randen består av två sträckor b och två halvcirklar med diametern h , så

$$P = 2b + 2 \cdot \frac{\pi h}{2} = 2b + \pi h \iff b = \frac{P - \pi h}{2}$$

Eftersom $b \geq 0$ och $h \geq 0$ är $0 \leq h \leq \frac{P}{\pi}$.

(a) Rektangelns area är

$$A_r(h) = bh = \frac{(P - \pi h)h}{2} = \frac{Ph - \pi h^2}{2}, \quad 0 \leq h \leq \frac{P}{\pi}$$

A_r är kontinuerlig på ett slutet, begränsat intervall, så ett största värde finns. I ändpunkterna är $A_r(0) = A_r(\frac{P}{\pi}) = 0$. Derivatan

$$A'_r(h) = \frac{P - 2\pi h}{2} = 0 \iff h = \frac{P}{2\pi}$$

ligger inne i intervallet, och $A''_r(h) = -\pi < 0$, så det är ett maximum. Då är $b = \frac{P - P/2}{2} = \frac{P}{4}$ och

$$h = \frac{P}{2\pi}, \quad b = \frac{P}{4}, \quad A_r^{\max} = \frac{P}{4} \cdot \frac{P}{2\pi} = \frac{P^2}{8\pi}$$

De raka sidorna är då lika långa som var och en av halvcirkelbågarna ($\frac{\pi h}{2} = \frac{P}{4}$).

(b) Den totala arean är rektangeln plus två halvcirklar med radien $\frac{h}{2}$:

$$A_s(h) = bh + \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Ph - \pi h^2}{2} + \frac{\pi h^2}{4} = \frac{2Ph - \pi h^2}{4}, \quad 0 \leq h \leq \frac{P}{\pi}$$

Derivatan är

$$A'_s(h) = \frac{2P - 2\pi h}{4} = \frac{P - \pi h}{2} \geq 0 \quad \text{på} \quad \left[0, \frac{P}{\pi}\right]$$

med likhet bara i högra ändpunkten. A_s är alltså växande, och maximum antas i $h = \frac{P}{\pi}$, där $b = 0$:

$$h = \frac{P}{\pi}, \quad b = 0, \quad A_s^{\max} = \frac{2P \cdot \frac{P}{\pi} - \pi \frac{P^2}{\pi^2}}{4} = \frac{P^2}{4\pi}$$

Stadion är då en cirkel med diametern $\frac{P}{\pi}$, i enlighet med den isoperimetriska olikheten $A \leq \frac{P^2}{4\pi}$.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- M0065M
- Matematisk induktion
- Talföljder och summor
- Binomialkoefficient
- Gränsvärden

- Oegentliga gränsvärden
 - Kontinuitet
 - Trigonometri
 - Arcusfunktioner
 - Funktioner och invers
 - Inversa funktioners derivata
 - Implicit derivering
 - Hyperboliska funktioner
 - Grafitning och asymptoter
 - Andraderivata och konvexitet
 - Extremvärden
-