

M0047M-2021-05-27

19 okt. 2026, 11 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2021-05-27 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_210527.pdf, m0047m_210527sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: induktionsbevis för att $3^{2n} - 1$ är delbart med 8
- Uppgift 2: gränsvärdena $e^{\cos \ln x}$ då $x \rightarrow 1$, $\frac{2^n}{n!}$ då $n \rightarrow \infty$ och $x^{\ln x}$ då $x \rightarrow 0^+$
- Uppgift 3: Lamberts W-funktion som invers till xe^x : definitionsområde, derivata och tangent i $x = e$
- Uppgift 4: derivator och andra ordningens Taylorpolynom för den relativistiska kinetiska energin
- Uppgift 5: extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter för $\frac{x^3}{x-2}$
- Uppgift 6: optimering, vattenränna med största tvärsnittsarea

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Delbarhet med 8 genom induktion

Bevisa, exempelvis med induktion, att det för alla positiva heltal $n \geq 1$ gäller att talet

$$c_n = 3^{2n} - 1$$

är delbart med 8. **Ledning:** ett heltal c är delbart med ett annat heltal d om det finns ett heltal k så att $c = kd$. (5p)

Totalpoäng: 5

 Ledtråd 1Ett bevis med **induktion**: basfall och induktionssteg. **Ledtråd 2**

Basfallet är $n = 1$. Anta att $3^{2p} - 1 = 8k$ för något heltal k och visa att $3^{2(p+1)} - 1 = 8l$ för något heltal l .

 Ledtråd 3

$$3^{2(p+1)} = 9 \cdot 3^{2p}, \text{ så } 3^{2(p+1)} - 1 = 9(3^{2p} - 1) + 8.$$

 Lösning

Basfall. För $n = 1$ är $c_1 = 3^2 - 1 = 8 = 8 \cdot 1$, som är delbart med 8.

Induktionssteg. Anta att $c_p = 3^{2p} - 1$ är delbart med 8 för något heltal $p \geq 1$, dvs. att $3^{2p} - 1 = 8k$ för något heltal k (induktionsantagandet). Då är

$$\begin{aligned} c_{p+1} &= 3^{2(p+1)} - 1 = 9 \cdot 3^{2p} - 1 = 9 \cdot 3^{2p} - 9 + 8 \\ &= 9(3^{2p} - 1) + 8 = 9 \cdot 8k + 8 = 8(9k + 1) = 8l \end{aligned}$$

där $l = 9k + 1$ är ett heltal eftersom k är ett heltal. Alltså är även c_{p+1} delbart med 8.

Enligt induktionsprincipen gäller

$$\boxed{8 \text{ delar } 3^{2n} - 1 \text{ för alla heltal } n \geq 1}$$

Alternativt bevis utan induktion. Med den geometriska summan är

$$3^{2n} - 1 = 9^n - 1 = (9 - 1)(1 + 9 + 9^2 + \dots + 9^{n-1}) = 8 \sum_{k=0}^{n-1} 9^k$$

och summan är ett heltal.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{\cos \ln x}$$

(1p)

(b) Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Ledning: instängningssatsen. (2p)

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

(a) handlar om **Kontinuitet**; (b) är en instängning av en **talföljd**; (c) är ett **oegentligt gränsvärde** där man skriver om potensen med **exponentialfunktionen**.

Ledtråd 2

(a) Funktionen är kontinuerlig i $x = 1$. (b) Skriv $\frac{2^n}{n!}$ som en produkt av n kvoter $\frac{2}{k}$ och uppskatta dem. (c) Använd $a^b = e^{b \ln a}$.

Ledtråd 3

(b) Alla kvoter $\frac{2}{k}$ med $k \geq 2$ är högst 1. (c) $x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$.

Lösning

(a) Funktionen $e^{\cos \ln x}$ är sammansatt av kontinuerliga funktioner och därmed kontinuerlig för $x > 0$, så man kan sätta in $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{\cos \ln x} = e^{\cos \ln 1} = e^{\cos 0} = \boxed{e}$$

(b) För $n \geq 3$ är

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n-1}}_{\text{alla} \leq 1} \cdot \frac{2}{n} \leq 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

(för $n = 3$ är den mellersta produkten tom). Eftersom $\frac{4}{n} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ ger instängningssatsen

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0}$$

Alternativt: varje kvot $\frac{2}{k}$ med $k \geq 3$ är högst $\frac{2}{3}$, så $0 < \frac{2^n}{n!} \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \rightarrow 0$.

(c) För $x > 0$ är

$$x^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{(\ln x)^2}$$

Då $x \rightarrow 0^+$ går $\ln x \rightarrow -\infty$, så $(\ln x)^2 \rightarrow +\infty$, och eftersom $e^t \rightarrow \infty$ då $t \rightarrow \infty$ är

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = +\infty}$$

Gränsvärdet existerar alltså inte som ändligt tal, men är oegentligt $+\infty$.

Kontrollerat mot facit.

3. Lamberts W-funktion

Låt

$$f(x) = xe^x, \quad -1 \leq x < \infty,$$

och definiera *Lamberts W-funktion* W som inversen till f , dvs. $W(x) = f^{-1}(x)$.

(a) Visa att f är inverterbar. Vad är definitionsmängden för W ? (2p)

(b) Visa att derivatan $W'(x)$ uppfyller

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$$

om $x \neq 0$. (2p)

(c) Finn tangenten till kurvan $y = W(x)$ i punkten $x = e$. *Tips: formeln i uppgift (b) kan vara användbar.* (2p)

Totalpoäng: 6

Ledtråd 1

Invers funktion och derivatan av en invers, som man får med **Implicit derivering**.

Ledtråd 2

(a) En strängt växande funktion är injektiv; definitionsmängden för W är värdemängden för f . (b) $y = W(x) \iff x = ye^y$; derivera sambandet med avseende på x . (c) Enpunktsformeln $y - W(e) = W'(e)(x - e)$.

Ledtråd 3

(a) $f'(x) = (1+x)e^x$. (b) $1 = (1+y)e^y y'$ och $e^y = \frac{x}{y}$. (c) $W(e) = 1$ eftersom $1 \cdot e^1 = e$.

Lösning

(a) Derivering ger

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

som är > 0 för $x > -1$ och $= 0$ bara i $x = -1$. Eftersom f är kontinuerlig på $[-1, \infty)$ är f strängt växande där, alltså injektiv och därmed inverterbar. Vidare är

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} xe^x = \infty$$

och f är kontinuerlig, så värdemängden är $[-\frac{1}{e}, \infty)$. Definitionsmängden för inversen är värdemängden för f :

$$D_W = [-\frac{1}{e}, \infty)$$

(b) Låt $x > -\frac{1}{e}$ och $y = W(x)$. Då är $y > -1$ och

$$y = W(x) \iff x = f(y) = ye^y$$

Implicit derivering av $x = ye^y$ med avseende på x ger

$$1 = (1+y)e^y \cdot y' \implies W'(x) = y' = \frac{1}{(1+y)e^y}$$

Om $x \neq 0$ är $y \neq 0$ (eftersom $W(0) = 0$ och W är injektiv), och då ger $x = ye^y$ att $e^y = \frac{x}{y}$. Insättning:

$$W'(x) = \frac{1}{(1+y) \cdot \frac{x}{y}} = \frac{y}{x(1+y)} = \boxed{\frac{W(x)}{x(1+W(x))}}$$

(c) $W(e)$ är den lösning y till $ye^y = e$ som ligger i $[-1, \infty)$. Uppenbarligen är $y = 1$ en lösning, och den är den enda eftersom f är injektiv. Alltså är $W(e) = 1$, och (b) ger

$$W'(e) = \frac{1}{e(1+1)} = \frac{1}{2e}$$

Tangenten är

$$y - 1 = \frac{1}{2e}(x - e) \iff \boxed{y = \frac{x}{2e} + \frac{1}{2}}$$

Kontroll: tangenten till $y = xe^x$ i $(1, e)$ har lutningen $f'(1) = 2e$; spegling i $y = x$ ger lutningen $\frac{1}{2e}$ i $(e, 1)$.

Kontrollerat mot facit. Lärarens lösning har i (b) en ledning ("implicit derivering") som inte står i tentatexten.

4. Relativistisk kinetisk energi

En partikel med vilomassa m_0 rör sig med hastigheten v (där $|v| < c$) relativt ett visst koordinatsystem. Einstein visade under sitt *annus mirabilis* 1905 att partikelns totala energi E är

$$E = mc^2,$$

där partikelns relativistiska massa m ges av

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Partikelns kinetiska energi T ges därmed av differensen mellan totala energin och viloenergin enligt formeln

$$T = T(v) = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

där c är ljusets hastighet i vakuum.

- (a) Beräkna förstaderivatet $T'(v)$ och andraderivatet $T''(v)$. (2p)
- (b) Approximera $T(v)$ med ett andra ordningens Taylorpolynom till $T(v)$ kring $v = 0$. Restterm behöver ej beräknas. (2p)

Totalpoäng: 4

Ledtråd 1

Kedjeregeln och produktregeln, sedan ett Taylorpolynom.

Ledtråd 2

Skriv $T(v) = m_0c^2 \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right)$. $P_2(v) = T(0) + T'(0)v + \frac{T''(0)}{2}v^2$.

Ledtråd 3

$$T'(v) = m_0 v \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}; \text{ derivera den med produktregeln.}$$

Lösning

(a) Med $T(v) = m_0 c^2 \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right)$ ger kedjeregeln

$$T'(v) = m_0 c^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \cdot \left(-\frac{2v}{c^2}\right) = \boxed{\frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}}$$

Produktregeln ger sedan

$$\begin{aligned} T''(v) &= m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} + m_0 v \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-5/2} \cdot \left(-\frac{2v}{c^2}\right) \\ &= m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-5/2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{3v^2}{c^2}\right) \\ &= \boxed{\frac{m_0 \left(1 + \frac{2v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}} \end{aligned}$$

(b) I $v = 0$ är

$$T(0) = m_0 c^2 (1 - 1) = 0, \quad T'(0) = 0, \quad T''(0) = m_0$$

så

$$P_2(v) = T(0) + T'(0)v + \frac{T''(0)}{2!}v^2 = \boxed{\frac{m_0 v^2}{2}}$$

För hastigheter som är små jämfört med c är alltså $T(v) \approx \frac{m_0 v^2}{2}$, den klassiska kinetiska energin.

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $\frac{x^3}{x-2}$

Definiera funktionen

$$y = f(x) = \frac{x^3}{x-2}.$$

Bestäm lokala extremvärden, inflexionspunkter och asymptoter till kurvan. Ställ upp detaljerade teckenscheman. Skissera kurvan. (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning: asymptoter, teckenschema för derivatan och andraderivatan för inflexionspunkter.

Ledtråd 2

Nämnaren är noll i $x = 2$. Polynomdivision visar hur funktionen beter sig långt ut. Derivera med kvotregeln och faktorisera.

Ledtråd 3

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2}, f'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} \text{ och } f''(x) = \frac{2x(x^2 - 6x + 12)}{(x-2)^3}.$$

Lösning

Asymptoter. Polynomdivision ger

$$f(x) = \frac{x^3}{x-2} = x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2}$$

Täljarens grad är två mer än nämnarens, så $f(x) \rightarrow +\infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$ och $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$; det finns ingen vågrät eller sned asymptot. Långt ut beter sig kurvan som parabeln $y = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$. Vid $x = 2$ går täljaren mot 8 och nämnaren mot 0:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

lodrät asymptot $x = 2$, inga andra asymptoter

Derivata. Kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2) - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$$

Kritiska punkter: $x = 0$ och $x = 3$.

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < 3$	3
$2x^2$	+	0	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0
$(x - 2)^2$	+	+	+	0	+	+
$f'(x)$	-	0	-	ej def.	-	0
$f(x)$	↘	terrass	↘	asymptot	↘	lok

 lok. min $f(3) = 27$, terrasspunkt i $(0, 0)$

Det finns inget lokalt maximum.

Andraderivata.

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 12x)(x-2)^2 - (2x^3 - 6x^2) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(6x^2 - 12x)(x-2) - 2(2x^3 - 6x^2)}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

Här är $x^2 - 6x + 12 = (x-3)^2 + 3 > 0$ för alla x .

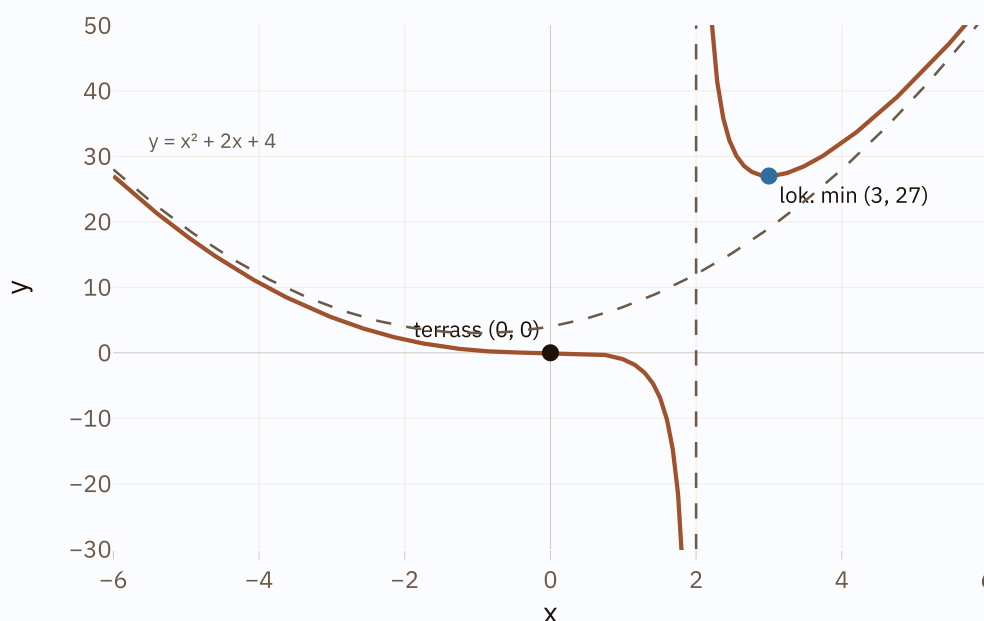
	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$2x$	-	0	+	+	+
$(x-3)^2 + 3$	+	+	+	+	+
$(x-2)^3$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	ej def.	+
$f(x)$	konvex	infl.	konkav	asymptot	konvex

f'' byter tecken i $x = 0$, så terrasspunkten är en inflexionspunkt:

 inflexionspunkt $(0, 0)$

($x = 2$ ger ingen inflexionspunkt eftersom f inte är definierad där.)

Skiss. Kurvan kommer från $+\infty$ till vänster, konvex, avtar och planar ut i terrassen $(0, 0)$ där den blir konkav, fortsätter nedåt mot $-\infty$ vid asymptoten $x = 2$. Till höger om asymptoten kommer den ned från $+\infty$, når minimum i $(3, 27)$ och växer sedan som parabeln $y = x^2 + 2x + 4$.



Kontrollerat mot facit.

6. Vattenränna med största tvärsnitt

En öppen ränna för vatten skall konstrueras ur en 30 cm bred plåt genom att bocka upp en tredjedel av plåten vinkeln ϕ på varje sida, se rännans tvärsnitt i figuren under.

(I tentan visas rännans tvärsnitt: en vågrät botten på 10 cm och två sidor på 10 cm vardera, som är uppbockade vinkeln ϕ från den vågräta linjen så att rännan vidgas uppåt. Tvärsnittsarean mellan sidorna och vattenytan är A .)

Hur skall vinkeln ϕ väljas för att rännan skall rymma så mycket vatten som möjligt och hur stor är tvärsnittsarean A då? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Optimering: sök **största värdet** av en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall, med **Trigonometri** för att uttrycka arean.

Ledtråd 2

Dela tvärsnittet i en rektangel $10 \times h$ och två rätta trianglar med kateterna b och h , där $h = 10 \sin \phi$ och $b = 10 \cos \phi$. Jämför kritiska punkter med ändpunkterna.

Ledtråd 3

$$A(\phi) = 100(1 + \cos \phi) \sin \phi \text{ och } A'(\phi) = 100(2 \cos^2 \phi + \cos \phi - 1) = 100(2 \cos \phi - 1)(\cos \phi + 1).$$

Lösning

Varje uppbockad sida har längden 10 cm. Höjden är $h = 10 \sin \phi$ och varje sida sticker ut $b = 10 \cos \phi$ vågrätt. Tvärsnittet är en rektangel med basen 10 och två rätta trianglar:

$$A = 10h + 2 \cdot \frac{bh}{2} = 100 \sin \phi + 100 \cos \phi \sin \phi = 100(1 + \cos \phi) \sin \phi$$

Det rimliga intervallet är $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ (för $\phi < 0$ rinner vattnet ut, och för $\phi > \frac{\pi}{2}$ lutar sidorna inåt). A är kontinuerlig på det slutna intervallet, så största värdet antas i en ändpunkt eller en kritisk punkt.

Derivata.

$$A'(\phi) = 100(-\sin^2 \phi + (1 + \cos \phi) \cos \phi) = 100(2 \cos^2 \phi + \cos \phi - 1) = 100(2 \cos \phi - 1)(\cos \phi + 1)$$

På intervallet är $\cos \phi + 1 > 0$, så $A'(\phi) = 0$ bara då $\cos \phi = \frac{1}{2}$, dvs. $\phi = \frac{\pi}{3}$. $A' > 0$ för $0 \leq \phi < \frac{\pi}{3}$ och $A' < 0$ för $\frac{\pi}{3} < \phi \leq \frac{\pi}{2}$, så det är ett maximum.

Jämförelse.

$$A(0) = 0, \quad A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 100, \quad A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 100 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}$$

och $75\sqrt{3} > 100 \iff 3\sqrt{3} > 4 \iff 27 > 16$, vilket stämmer. Alltså

$$\phi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ, \quad A_{\max} = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 129,9 \text{ cm}^2$$

Rännan blir då en halv regelbunden sexhörning.

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
- [Matematisk induktion](#)
- [Gränsvärden](#)
- [Oegentliga gränsvärden](#)
- [Kontinuitet](#)
- [Talföljder och summor](#)
- [Exponentialfunktioner och logaritmer](#)
- [Funktioner och invers](#)
- [Inversa funktioners derivata](#)
- [Implicit derivering](#)
- [Deriveringsregler](#)
- [Taylors formel](#)
- [Extremvärden](#)
- [Grafritning och asymptoter](#)
- [Andraderivata och konvexitet](#)
- [Trigonometri](#)