

M0047M-2021-03-25

19 okt. 2026, 12 min läsning

UTKAST

#tenta #matematik #envariabelanalys

Kurs: M0065M — Envariabelanalys 1 **Datum:** 2021-03-25 **Källa:** originaltentamen och lärarens lösningar (m0047m_210325.pdf, m0047m_210325sols.pdf) M0047M är föregångaren till M0065M med samma innehåll.

Översikt

- Uppgift 1: rekursionen $b_{k+1} = 2b_k + 1$, explicit formel med induktionsbevis och summan av de n första termerna
- Uppgift 2: gränsvärdena $\frac{x \ln x}{x + \ln x}$ och $2n \sin \frac{\pi}{n}$ samt konstanter som ger ett ändligt gränsvärde
- Uppgift 3: involutionen $f(x) = \frac{3x-2}{4x-3}$, derivatan av inversen och värdemängden
- Uppgift 4: en ellips och en hyperbel som skär varandra under räta vinklar
- Uppgift 5: extremvärden och asymptoter för $e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x$ och antalet lösningar till $f(x) = C$
- Uppgift 6: optimering, balken med störst böjmotstånd ur en rund stock

Så använder du sidan

Försök själv först. Ledtråd 1 säger vilken sorts uppgift det är, ledtråd 2 (inuti ledtråd 1) ger modellen och ledtråd 3 (inuti ledtråd 2) nyckelsteget. **Lösning** är hela uträkningen, kontrollerad mot lärarens facit.

1. Natasjas brev: rekursion och induktion

Trollpackan Natasja är väldigt förtjust i att skicka sina förbannelser med brev. Hon har fått en idé att under n st dagar massposta en hög med brev. Första dagen skickar hon ett brev ($b_1 = 1$). Dag två skickar hon tre brev ($b_2 = 3$), dag tre skickar hon sju brev ($b_3 = 7$) och så vidare. Varje dag skickar hon dubbelt så många brev som dagen innan plus ytterligare ett brev.

- (a) Finn ett explicit uttryck för antal brev $b_k = f(k)$ som Natasja skickar dag k . Bevisa ditt påstående med induktion. (3p)
- (b) Hur många brev har Natasja totalt skickat efter n st dagar? (2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

En rekursiv **talföljd**: gissa en formel, bevisa den med **induktion** och summera sedan med en geometrisk summa.

Ledtråd 2

Rekursionen är $b_{k+1} = 2b_k + 1$. Jämför 1, 3, 7, 15, ... med tvåpotenserna. För (b): $\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n - 1}{r - 1}$.

Ledtråd 3

Gissningen är $b_k = 2^k - 1$. I induktionssteget: $b_{p+1} = 2b_p + 1 = 2(2^p - 1) + 1$. I (b): dela upp $\sum(2^k - 1) = \sum 2^k - \sum 1$.

Lösning

(a) Rekursionen $b_{k+1} = 2b_k + 1$ ger

$$b_1 = 1 = 2^1 - 1, \quad b_2 = 3 = 2^2 - 1, \quad b_3 = 7 = 2^3 - 1, \quad b_4 = 15 = 2^4 - 1$$

så det är rimligt att gissa $b_k = 2^k - 1$.

Basfall. $k = 1$: $2^1 - 1 = 1 = b_1$. Stämmer.

Induktionssteg. Anta att $b_p = 2^p - 1$ för något $p \geq 1$ (induktionsantagandet). Då är

$$b_{p+1} = 2b_p + 1 = 2(2^p - 1) + 1 = 2^{p+1} - 2 + 1 = 2^{p+1} - 1$$

så formeln gäller även för $k = p + 1$. Enligt induktionsprincipen är

$$b_k = 2^k - 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(b) Med den geometriska summan $\sum_{k=1}^n 2^k = \sum_{k=0}^n 2^k - 1 = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - 1 = 2^{n+1} - 2$ blir totalen

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 1 = 2^{n+1} - 2 - n$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 2^{n+1} - n - 2$$

Kontroll: $n = 3$ ger $1 + 3 + 7 = 11 = 16 - 3 - 2$.

Kontrollerat mot facit.

2. Tre gränsvärden

Avgör huruvida följande (även oegentliga) gränsvärden existerar och om så, bestäm dem (utan hjälp av l'Hôpitals regler):

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}.$$

(1p)

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{\pi}{n}$$

(2p)

(c) Bestäm konstanterna a och b så att

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax + b}{x^2 - 2x - 3} = 1.$$

(2p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Gränsvärden och oegentliga gränsvärden med standardgränsvärden, och i (c) faktorisering av nämnaren.

Ledtråd 2

(a) Förkorta med x och använd $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$. (b) Byt variabel så att standardgränsvärdet $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ syns. (c) Nämnaren går mot 0 när $x \rightarrow 3$; vad krävs då av täljaren för att gränsvärdet ska bli ändligt?

Ledtråd 3

(b) Sätt $h = \frac{\pi}{n}$, så $2n = \frac{2\pi}{h}$. (c) $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, så täljaren måste vara $a(x - 3)$, dvs. $b = -3a$.

Lösning

(a) Förkorta med x :

$$\frac{x \ln x}{x + \ln x} = \frac{\ln x}{1 + \frac{\ln x}{x}}$$

Täljaren går mot $+\infty$ och nämnaren mot $1 + 0 = 1$ (standardgränsvärdet $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$), så

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x} = +\infty$$

(b) Sätt $h = \frac{\pi}{n}$. Då går $h \rightarrow 0^+$ när $n \rightarrow \infty$ och $2n = \frac{2\pi}{h}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2\pi \cdot \frac{\sin h}{h} = 2\pi \cdot 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi$$

Anmärkning: $n \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n}$ är omkretsen av en regelbunden n -hörning inskriven i enhetscirkeln, och den går mot cirkelns omkrets 2π .

(c) Nämnaren är $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ och går mot 0 när $x \rightarrow 3$. Om täljaren inte också gick mot 0, dvs. om $3a + b \neq 0$, skulle kvoten gå mot $\pm\infty$ eller sakna gränsvärde. Alltså måste $3a + b = 0$, så $b = -3a$ och $ax + b = a(x - 3)$. Då är

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a}{x+1} = \frac{a}{4}$$

Villkoret $\frac{a}{4} = 1$ ger

$$a = 4, \quad b = -12$$

Kontrollerat mot facit.

3. En involution

En funktion f som är sin egen invers (dvs. $f^{-1} = f$) kallas för en *involution*.

(a) Visa att funktionen

$$f(x) = \frac{3x-2}{4x-3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\},$$

är en involution. (2p)

(b) Vad är $(f^{-1})'(2)$? (2p)

(c) Vad är värdemängden för f ? (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Inversa funktioner och derivatan av en invers.

Ledtråd 2

(a) Lös $x = f(y)$ för y , eller visa att $f(f(x)) = x$. (b) Eftersom $f^{-1} = f$ är $(f^{-1})' = f'$. (c) Värdemängden för f är definitionsmängden för f^{-1} .

Ledtråd 3

(a) $x(4y-3) = 3y-2 \iff (4x-3)y = 3x-2$. (b) Kvotregeln ger $f'(x) = -\frac{1}{(4x-3)^2}$.

 Lösning

(a) Lös $x = f(y)$ för $y \neq \frac{3}{4}$:

$$x = \frac{3y - 2}{4y - 3} \iff 4xy - 3x = 3y - 2 \iff (4x - 3)y = 3x - 2 \iff y = \frac{3x - 2}{4x - 3}$$

för $x \neq \frac{3}{4}$. (Värdet $x = \frac{3}{4}$ antas aldrig: då blir ekvationen $0 = \frac{1}{4}$.) Alltså är

$$f^{-1}(x) = \frac{3x - 2}{4x - 3} = f(x)$$

Alternativt: för $x \neq \frac{3}{4}$ är

$$f(f(x)) = \frac{3 \cdot \frac{3x - 2}{4x - 3} - 2}{4 \cdot \frac{3x - 2}{4x - 3} - 3} = \frac{3(3x - 2) - 2(4x - 3)}{4(3x - 2) - 3(4x - 3)} = \frac{x}{1} = x$$

(b) Eftersom $f^{-1} = f$ är $(f^{-1})' = f'$. Kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{3(4x - 3) - 4(3x - 2)}{(4x - 3)^2} = \frac{-1}{(4x - 3)^2}$$

så

$$(f^{-1})'(2) = -\frac{1}{(8 - 3)^2} = -\frac{1}{25}$$

Kontroll med formeln för inversens derivata: $f^{-1}(2) = f(2) = \frac{4}{5}$ och $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(4/5)} = -(\frac{16}{5} - 3)^2 = -\frac{1}{25}$.

(c) Värdemängden för f är definitionsmängden för $f^{-1} = f$:

$$V_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$$

Kontrollerat mot facit.

4. Ellips och hyperbel som skär varandra vinkelrätt

Visa att ellipsen

$$2x^2 + 5y^2 = 10$$

och hyperbeln

$$x^2 - 2y^2 = 2$$

skär varandra under räta vinklar. *Ledning: visa först att kurvorna skär varandra och visa sedan att tangenterna till kurvorna i skärningspunkterna är vinkelräta mot varandra. (5p)*

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Skärningspunkter ur ett ekvationssystem och tangentlutningar med **Implicit derivering**.

Ledtråd 2

Två linjer med lutningarna k_1 och k_2 är vinkelräta om $k_1 k_2 = -1$. Derivera båda ekvationerna implicit med avseende på x .

Ledtråd 3

Systemet ger $x^2 = \frac{10}{3}$ och $y^2 = \frac{2}{3}$. Lutningarna är $y' = -\frac{2x}{5y}$ och $y' = \frac{x}{2y}$.

Lösning

Skärningspunkter. En skärningspunkt (a, b) uppfyller

$$\begin{cases} 2a^2 + 5b^2 = 10 \\ a^2 - 2b^2 = 2 \end{cases}$$

Den andra ekvationen ger $a^2 = 2 + 2b^2$, och insatt i den första:

$$2(2 + 2b^2) + 5b^2 = 10 \iff 9b^2 = 6 \iff b^2 = \frac{2}{3}, \quad a^2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

Kurvorna skär alltså varandra i fyra punkter:

$$(a, b) = (\pm\sqrt{\frac{10}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$$

Tangenternas lutningar. Implicit derivering med avseende på x ($y = y(x), y \neq 0$):

$$4x + 10yy' = 0 \iff y' = -\frac{2x}{5y}, \quad 2x - 4yy' = 0 \iff y' = \frac{x}{2y}$$

I en skärningspunkt är $b \neq 0$, och lutningarna är $k_1 = -\frac{2a}{5b}$ (ellipsen) och $k_2 = \frac{a}{2b}$ (hyperbeln).

Produkten är

$$k_1 k_2 = -\frac{2a}{5b} \cdot \frac{a}{2b} = -\frac{a^2}{5b^2} = -\frac{10/3}{5 \cdot 2/3} = -1$$

Detta gäller i alla fyra punkterna eftersom bara a^2 och b^2 ingår. Alltså är tangenterna vinkelräta:

kurvorna skär varandra under räta vinklar i $(\pm\sqrt{\frac{10}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$

Kontrollerat mot facit.

5. Kurvan $e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x$

Definiera funktionen

$$y = f(x) = e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x.$$

(a) Bestäm lokala extremvärden och asymptoter till kurvan. Ställ upp ordentliga teckenscheman. Konvexitet behöver ej beaktas. Skissera kurvan. *Ledning:* $e^{kx} = (e^x)^k$. (4p)

(b) Bestäm hur många olika lösningar ekvationen

$$e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x = C.$$

har för alla värden på talet $C \in \mathbb{R}$. Motivera! (1p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Kurvundersökning med teckenschema för derivatan, och sedan antal lösningar ur grafen.

Ledtråd 2

Faktorisera med $t = e^x$: $f(x) = e^x(e^x - 3)^2$. Undersök $x \rightarrow \pm\infty$ och $\frac{f(x)}{x}$ för en sned asymptot.

Ledtråd 3

$f'(x) = 3e^x(e^x - 1)(e^x - 3)$, så de kritiska punkterna är $x = 0$ och $x = \ln 3$. I (b): dra horisontella linjer $y = C$ i grafen.

Lösning

(a) Faktorisering.

$$f(x) = e^x((e^x)^2 - 6e^x + 9) = e^x(e^x - 3)^2 \geq 0$$

med likhet bara då $e^x = 3$, dvs. $x = \ln 3$.

Asymptoter. f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så lodräta asymptoter saknas. Vidare är

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(e^x - 3)^2 = 0 \cdot (-3)^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x(e^x - 3)^2 = \infty$$

så $y = 0$ är en vågrät asymptot då $x \rightarrow -\infty$. Åt höger är

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \cdot (e^x - 3)^2 = \infty$$

så där finns ingen sned asymptot.

enda asymptoten är $y = 0$ då $x \rightarrow -\infty$

Derivata.

$$f'(x) = 3e^{3x} - 12e^{2x} + 9e^x = 3e^x((e^x)^2 - 4e^x + 3) = 3e^x(e^x - 1)(e^x - 3)$$

Kritiska punkter: $e^x = 1$ eller $e^x = 3$, dvs. $x = 0$ och $x = \ln 3$.

	$x < 0$	0	$0 < x < \ln 3$	$\ln 3$	$x > \ln 3$
$3e^x$	+	+	+	+	+

	$x < 0$	0	$0 < x < \ln 3$	$\ln 3$	$x > \ln 3$
$e^x - 1$	–	0	+	+	+
$e^x - 3$	–	–	–	0	+
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

$$\text{lok. max } f(0) = 1 \cdot (1 - 3)^2 = 4, \quad \text{lok. min } f(\ln 3) = 3 \cdot 0^2 = 0$$

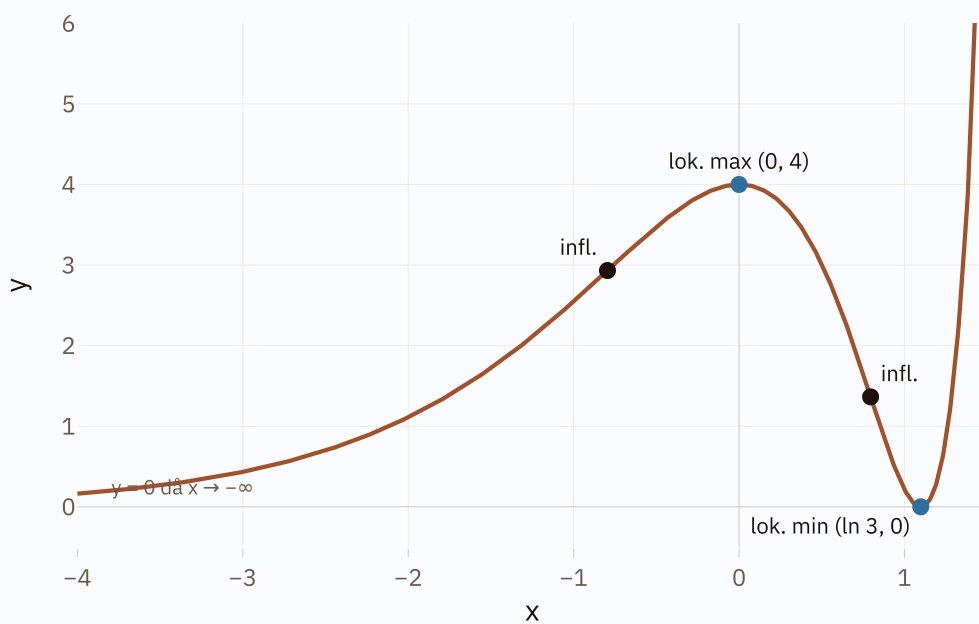
Minimet är också globalt eftersom $f \geq 0$; globalt maximum saknas eftersom $f \rightarrow \infty$.

Frivilligt: $f''(x) = 9e^{3x} - 24e^{2x} + 9e^x = 9e^x((e^x)^2 - \frac{8}{3}e^x + 1)$ byter tecken där $e^x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$, så kurvan har inflexionspunkter i $x = \ln \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} \approx \pm 0,80$.

Skiss. Kurvan kommer in längs x -axeln från vänster (ovanför den), stiger till $(0, 4)$, sjunker ned till $(\ln 3, 0) \approx (1,10; 0)$ där den tangerar x -axeln och växer sedan obegränsat.

(b) Lösningarna till $f(x) = C$ är skärningspunkterna mellan kurvan och den vågräta linjen $y = C$. På $(-\infty, 0]$ växer f strängt från (men inte till) 0 upp till 4, på $[0, \ln 3]$ avtar f strängt från 4 till 0 och på $[\ln 3, \infty)$ växer f strängt från 0 mot ∞ . Varje monotont intervall ger alltså högst en lösning, och enligt satsen om mellanliggande värden en lösning när C ligger i intervallets värdemängd:

$C < 0$:	inga lösningar
$C = 0$:	en lösning ($x = \ln 3$)
$0 < C < 4$:	tre lösningar
$C = 4$:	två lösningar ($x = 0$ och en med $x > \ln 3$)
$C > 4$:	en lösning



Kontrollerat mot facit.

6. Balk med maximalt böjmotstånd

Ur en lång timmerstock med cirkulärt tvärsnitt med radie R skall en balk med rektangulärt tvärsnitt sågas. Böjmotståndet W hos en sådan balk ges av

$$W = \frac{bh^2}{6}$$

där b är balkens bredd och h balkens höjd. Hur skall b och h väljas för att böjmotståndet W skall bli maximalt och vad blir det maximala böjmotståndet $W_{\max}$? (5p)

Totalpoäng: 5

Ledtråd 1

Optimering: **största värde** för en kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall.

Ledtråd 2

Balkens hörn ska ligga på stockens rand, så rektangelns diagonal är en diameter: $b^2 + h^2 = (2R)^2$. Uttryck därför W som en funktion av enbart b .

Ledtråd 3

$$W(b) = \frac{b(4R^2 - b^2)}{6} \text{ för } 0 \leq b \leq 2R. \text{ Jämför kritiska punkter med ändpunkterna.}$$

Lösning

För maximalt W ska balkens hörn ligga på stockens periferi, så diagonalen är en diameter:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \iff h^2 = 4R^2 - b^2$$

Då är

$$W(b) = \frac{b(4R^2 - b^2)}{6}, \quad 0 \leq b \leq 2R$$

W är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[0, 2R]$, så ett största värde finns. I ändpunkterna är $W(0) = W(2R) = 0$, så maximum antas i en inre punkt där derivatan är noll:

$$W'(b) = \frac{4R^2 - 3b^2}{6} = 0 \iff b^2 = \frac{4R^2}{3} \iff b = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

(bara den positiva roten ligger i intervallet). Motsvarande höjd är

$$h = \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = \sqrt{\frac{8R^2}{3}} = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$$

Kontroll: $W''(b) = -b < 0$, så det är ett maximum. Det maximala böjmotståndet är

$$W_{\max} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8R^2}{3} = \frac{8R^3}{9\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}R^3}{27}$$

$$\boxed{b = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \quad h = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}b, \quad W_{\max} = \frac{8\sqrt{3}R^3}{27} \approx 0,513R^3}$$

Kontrollerat mot facit.

Se även

- [M0065M](#)
 - [Matematisk induktion](#)
 - [Talföljder och summor](#)
 - [Gränsvärden](#)
 - [Oegentliga gränsvärden](#)
 - [Polynom och faktorisering](#)
 - [Funktioner och invers](#)
 - [Inversa funktioners derivata](#)
 - [Implicit derivering](#)
 - [Extremvärden](#)
 - [Grafritning och asymptoter](#)
 - [Ekvationslösning med derivata](#)
-